

# 1 Einführung

## 1.1 Überblick: Was ist Physik ?

Lehre von der körperlichen, materieerfüllten Welt

---

*Aristoteles, 384 - 322 v. Chr., Metaphysik*

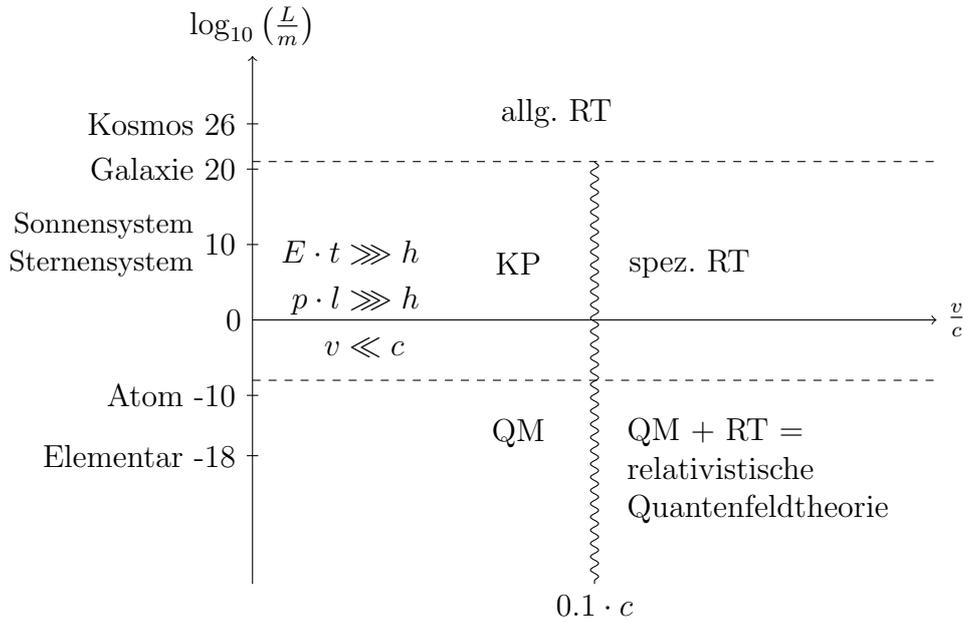
heute: "Quantitative Beschreibung (unbelebter) Vorgänge in der Natur"  
dabei "Reduzierung (komplexer) Naturerscheinungen auf einfache Gesetzmäßigkeiten"  
⇒ mathematische Formulierung!

### Viele verschiedene Fachgebiete

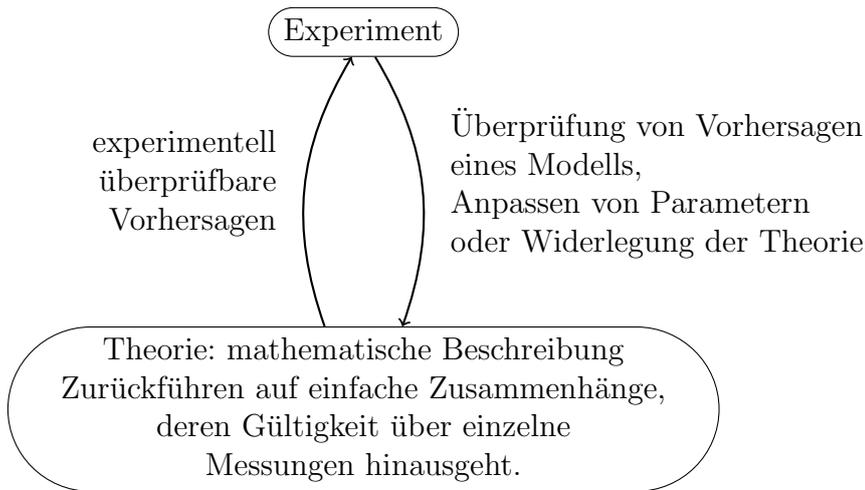
- QM, RT {
  - Kosmologie → Entstehung und Entwicklung des Universums
  - Astrophysik → Vorgänge in Sternen und Galaxien, etc.
  
- Klassisch {
  - Geophysik → Physik der Erde
  - Mechanik → Bewegungsgesetze makroskopischer Körper
  - Wärmelehre → makroskopische Beschreibung von Gasen, allgemeine Temperaturphänomene
  - Elektrodynamik → elektrische und magnetische Phänomene
  - Optik → Licht, allgemeinere elektromagnetische Wellenphänomene
  
- QM {
  - Biophysik → belebter Materie
  - Festkörperphysik → Kristalle, Metalle (mikroskopisch)
  - statistische Physik → Gase (mikroskopisch)
  - Atom- + Molekülphysik → Atome, Moleküle (Elektronenhülle)
  
- RT {
  - Kernphysik → Atomkerne
  - Teilchenphysik → Elementarteilchen

# 1 Einführung

QM: Quantenmechanik RT: Relativitätstheorie (bei große Geschwindigkeiten, große Massen)



L: Länge; v: Geschwindigkeit  
 c: Lichtgeschwindigkeit;  $c = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$



## KP: Klassische Physik

Streng deterministisch,  
 "anschaulich"  
 "kleine Geschwindigkeiten"

## QM: Quantenmechanik

Statistisch deterministisch,  
 "unanschaulich"  
 Unschärferelationen  
 Energie ( $E$ ) · Zeit ( $t$ )  $\geq h$   
 $h$ : planksches Wirkungsquantum,  
 $h = 6.625 \cdot 10^{-34} J_s$   
 Impuls ( $p$ ) · Länge ( $L$ )  $\geq h$

Neben Vereinheitlichung der Kräfte (“Standardmodell”) und der Beschreibung der unbelebten Natur auf allen Größenskalen ist ein weiteres, aktuelles Forschungsgebiet die Beschreibung und Modellierung immer komplexerer Phänomene. → Biologie (Molekularbiologie, Zellbiologie), Chemie (Quantenchemie), Medizin (Genetik)

“Physik ist Fundament jeder Naturwissenschaft”

→ Physik im heutigen Sinn begann mit Galilei (1564-1642), der erstmalig gezielt Experimente durchführte. (“beschleunigte Bewegung” [Fall einer Kugel]) Experiment: eine gezielte Frage an die Natur, in Form einer reproduzierbaren Messung (genau definierte Anfangs- und Randbedingungen) Bekannte Genauigkeit ⇒ Messfehler

### 1.1.1 Physikalische Größen

**Bezeichnungen und Einheiten** Physikalische Größen geben Eigenschaften von Gegenständen oder Vorgänge an.

$$\text{Physikalische Größe} = \underbrace{\langle \text{Namenssymbol} \rangle}_{\text{oft durch Konvention festgelegt, aber nicht bindend}} = \langle \text{Zahl} \rangle \langle \text{Einheit} \rangle \pm \langle \text{Zahl} \rangle \underbrace{\langle \text{Einheit} \rangle}_{\text{passend zur physik. Größe}}.$$

Beispiel: gemessene Länge =  $L = 1.5m \pm 0.03m$

Einheiten:

- SI-System
  - Basiseinheiten (m, kg, s, mol, K, A, cd)
  - abgeleitete Einheiten, rückführbar auf Kombination von Basiseinheiten, zB. Kraft-Einheit 1 Newton =  $1N = 1kg \frac{m}{s^2}$

Präfixe für Einheiten:

Name	Präfix	Potenz	Beispiel
atto	a	$10^{-18}$	1 am = $10^{-18}m$
femto	f	$10^{-15}$	1 fm = $10^{-15}m$
piko	p	$10^{-12}$	1 pm = $10^{-12}m$
nano	n	$10^{-9}$	1 nm = $10^{-9}m$
micro	$\mu$	$10^{-6}$	1 $\mu m$ = $10^{-6}m$
milli	m	$10^{-3}$	1 mm = $10^{-3}m$
centi	c	$10^{-2}$	1 cm = $10^{-2}m$
Kilo	K	$10^3$	1 km = 10m
Mega	M	$10^6$	1 MW
Giga	G	$10^9$	GW
Terra	T	$10^{12}$	TW
Peta	P	$10^{15}$	PeV
Exa	E	$10^{18}$	EeV

Es gibt drei mechanische Grundgrößen: Länge [m], Zeit [s], Masse [kg]

Zusätzlich (nicht-mechanische) Grundgrößen: Stoffmenge [mol], Temperatur [K = Kelvin], Stromstärke [A = Ampere], Lichtstärke [cd]

Definition der mechanischen Basiseinheiten heute:

## 1 Einführung

$1m$  := Strecke, die Licht im Vakuum, während der Zeit  $\frac{1}{299,792,458s}$  durchläuft.

$1s$  := Zeitintervall während dessen die Caesium-Uhr 9, 192, 631, 770.0 Schwingungen durchführt. Relative Genauigkeit:  $10^{-15}$

$1kg$  := Urkilogramm in Paris

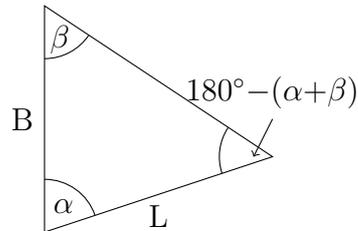
### 1.1.2 Längen und Zeitmessung, Fehlerrechnung

#### Verschiedene Möglichkeiten der Längenmessung

kleiner ↓	$km$	Laufzeitmessung: Signal bekannter Geschwindigkeit nötig
	$1m$	Triangulation: definierte Basis mit def. Länge
		Maßstab (Metermaß, Schieblehre)
		Lupe
	$\geq \lambda$	Mikroskop (Genauigkeit begrenzt durch die Wellenlänge $\lambda$ )
	$10^{-10}m$	Elektronenmikroskop Rastertunnelmikroskop ( $\hat{=}$ einzelne Atome)

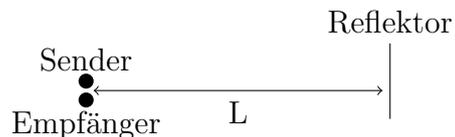
#### Triangulation

$$\begin{aligned}
 B \cdot \sin(\beta) &= L \cdot \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\
 &= L \cdot \sin(\alpha + \beta) \\
 \rightarrow L &= B \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}
 \end{aligned}$$



#### Laufzeitmessung

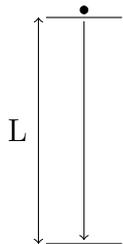
$L = \frac{v \cdot t}{2}$ , wobei  
 $v$ : Signalgeschwindigkeit  
 $t$ : Zeit



#### Zeitmessung

- Uhr:**  
 Zählen periodischer Vorgänge (astronomisch, mechanisch, elektronisch) Cs-Atomuhr:  
 genaueste Uhr heutzutage rel. Genauigkeit  $\frac{\Delta t}{t} \cdot 10^{-15}$
- radiometrische Methoden:**  
 große Zeitspannen, radioaktiver Zerfall, gehorcht Zerfallsgesetz:  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ ,  
 $\tau$ : mittlere Lebensdauer Beispiel:  $C^{14}$ -Methode: Alter von Biomaterial ca  $\geq 10^3$   
 Jahre.

## 2 Freier Fall: Bestimmung von $g$ (Beschleunigung)



$t_{\text{Fall}}$ : Zeit des Falls um Strecke  $L$ .

$$t_{\text{Fall},1} = 0.372s$$

$$t_{\text{Fall},2} = 0.371s$$

$$t_{\text{Fall},3} = 0.372s$$

$$t_{\text{Fall},4} = 0.371s$$

Unsicherheit  $\Delta s \approx 2ms$

$$L = 70cm = 0.7m \pm 0.003m (\text{Unsicherheit ca } 2 - 3mm)$$

$$L = \frac{1}{2}gt^2, \text{ wenn Anfangsgeschwindigkeit } v(t=0) = 0$$

Strecke  $x(t)$ ,  $x(t=0) = 0$

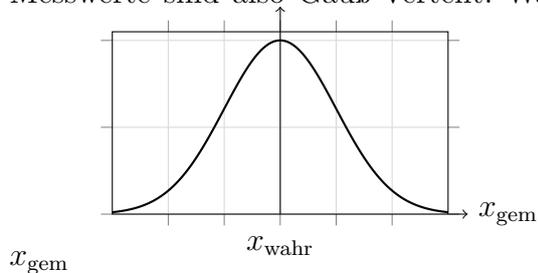
$$g = 2 \cdot \frac{L}{t^2} = 2 \cdot \frac{0.7m}{(0.3715s)^2} = 10.14 \frac{m}{s^2} \text{ „wahrer Wert“: } g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

### 2.0.3 Fehlerrechnung

#### 1. statistische Fehler

- Messwert variiert von Messung zu Messung
- Verteilung der Messwerte entsprechend der statistischen Verteilung, in den meisten Fällen Gauß-Verteilung (auch Normal-Verteilung genannt)

Messwerte sind also Gauß-verteilt. Wahrscheinlichkeit für bestimmten Messwert



## 2 Freier Fall: Bestimmung von $g$ (Beschleunigung)

$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_{\text{gem}} - x_{\text{wahr}})^2}{2\sigma^2}}$   $\sigma^2$ : Mittelwert von  $(x_{\text{gem}} - x_{\text{wahr}})^2$   $\sigma$ : Mittlerer Fehler einer Einzelmessung innerhalb von  $x_{\text{wahr}} \pm \sigma$  liegen 68% der Messwerte, wenn diese Gauß-Verteilt sind.

Beste Abschätzung von  $x_{\text{wahr}}$  aus  $N$  Einzelmessungen: Arithmetisches Mittel:  $x_{\text{wahr}} =$

$$x_{\text{gem}} \Rightarrow \bar{x}_{\text{gem}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{\text{gem},i}$$

$$\text{Abschätzung von } \sigma: \sigma = \sqrt{\langle (x_{\text{gem}} - x_{\text{wahr}})^2 \rangle} \approx \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{\text{gem},i} - \bar{x})^2} = \sigma_N$$

$$\text{Fehler des Mittelwertes } \bar{x}: \Delta x = \frac{\sigma_N}{\sqrt{N}} = \text{Fehler von } \bar{x}$$

$$\Rightarrow \text{Messergebnis} = \bar{x} \pm \Delta x$$

2. **systematische Fehler** Verfälschung des Messergebnisses durch die Messmethode oder das Messgerät. Tritt gleichartig für jede Einzelmessung auf.

### 2.0.4 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Allgemeiner Fall: Ergebnis  $x$  hängt von  $m$  Messgrößen ab  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ,  $x = x(a_1, a_2, \dots, a_m)$

Was ist der Fehler von  $x$ , wenn die Unsicherheiten von  $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_m$  der einzelnen Messgrößen bekannt sind?

(Voraussetzung: Einzelne Messgrößen  $a_1, \dots, a_m$  sind völlig unabhängig!)

$$\Delta X = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \underbrace{\frac{\delta x}{\delta a_i}}_{\text{partielle Ableitung von } x \text{ nach } a_i} \Delta a_i \right)^2}$$

**Beispiel:** Fehler von  $g$  (mit  $g = \frac{2L}{t^2}$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta g &= \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta t} \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(g \frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(-g \frac{2\Delta t}{t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t}\right)^2} \\ &= 0.12 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

$$\Delta L = 3mm, \Delta t = 0.002s$$

Messergebnis lautet also korrekt:  $g = 10.14 \frac{m}{s^2} \pm 0.12 \frac{m}{s^2}$

Systematische Fehler:

- $v(t=0) = 0$  ist nicht gegeben (Anfangsgeschwindigkeit  $\neq 0$  beim passieren der 1. Lichtschranke).

- Kugelform: Lichtschanke wird evtl. nicht zentrisch getroffen



# 3 Mechanik

Lehre von der Bewegung makroskopischer Körper, Gase und Flüssigkeiten.

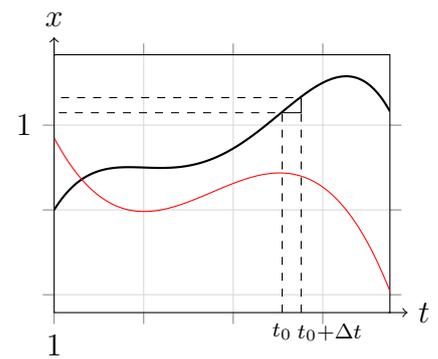
## 3.1 Kinematik

Beschreibt die Bewegung von Objekten.

### 3.1.1 Geradlinige Bewegung

Geschwindigkeit, Beschleunigung  
 Bewegung entlang einer geraden Strecke.

**Beispiel:** Reiter auf Luftkissenbahn: ohne äußere Kräfte gleichförmige Bewegung, d.h. der Ort  $x$  als Funktion der Zeit  $t$ :  $x = v_0 \cdot t$ .

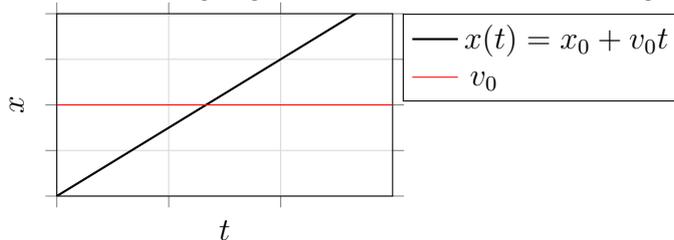


Allgemeiner Fall: Angabe des Ortes  $x$  als Funktion der Zeit  $t$ :  $x(t)$

Geschwindigkeit: 
$$\text{Geschwindigkeit} = v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{\dot{x}(t)}_{\text{abk. Schreibweise für } \frac{dx}{dt}}$$

Einheit der Geschwindigkeit  $[v] = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$ . Bemerkung: Im allgemeinen Fall variiert  $v$  mit  $t$ . Bei einer gleichförmigen Bewegung ist  $v$  konstant.

Beispiel: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$



## 3.2 Beschleunigung

Beschleunigung =  $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$  (zweite Ableitung von  $x$  nach  $t$ ).

Einheit  $[a] = \frac{m}{s^2} = ms^{-2}$

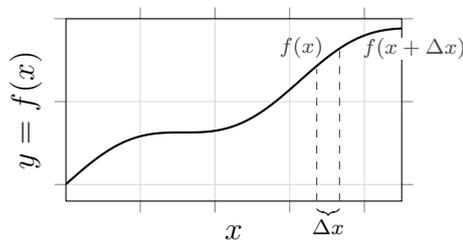
Bem.: Jede Änderung von  $v$  ist eine Beschleunigung, auch wenn  $v$  geringer wird, Abbremsung ist nur eine negative Beschleunigung.

Falls  $a = 0 \Rightarrow$  gleichförmige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$ .

### 3.2.1 Mathematischer Einschub: Differential- und Integralrechnung

**Ableitungen** Für hinreichend „glatte“ Funktionen  $f(x)$  ist die Ableitung  $f'(x) = \frac{df}{dx}$  durch die lokale Steigung (Tangente) am Punkt  $x$  gegeben.

$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  Steigungswinkel der Tangente  $\alpha$   $\tan \alpha = \frac{df}{dx}$



$\frac{df}{dx} > 0$ :  $f(x)$  steigt an wenn  $x$  zunimmt

$\frac{df}{dx} < 0$ :  $f(x)$  fällt ab wenn  $x$  zunimmt

$\frac{df}{dx} = 0$ :  $f(x)$  hat entweder Maximum, Minimum oder Sattelpunkt, d.h. auf jeden Fall eine horizontale Tangente.

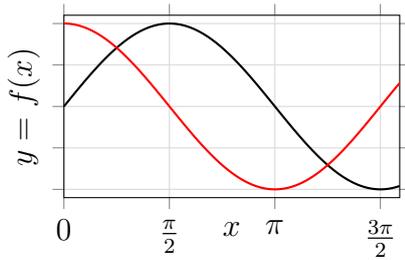
#### Ableitungen elementarer Funktionen

$$n = 0 : \frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$n = 1 : \frac{d}{dx}(ax) = a$$

$$n = -1 : \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{a}{x^2}$$

$f(x)$	$\frac{d(f(x))}{dx}$
$a \cdot x^n$	$n \cdot a \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$



Summenregel:  $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

Produktregel:  $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$

Beispiel:  $\frac{d}{dx}(x \cdot \sin(x)) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \sin(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\sin(x)) = \sin(x) + x \cos(x)$

Kettenregel:  $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$

Beispiel:  $\frac{d}{dx}(e^{-ax^2}) = \frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = \frac{d(e^g)}{dg} = \frac{dg}{dx} = e^g(-2ax) = -2axe^{-ax}$

Quotientenregel:  $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)^{-1}) = \frac{df}{dx}(g(x))^{-1} + f(x) \cdot \frac{-1}{(g(x))^2} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}}{(g(x))^2}$

Beispiel:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) = \frac{(1-x)1 - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Schreibweise:  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

**Integrale** Das Integral  $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$  berechnet die Fläche unter der Kurve  $f(x)$  im Intervall  $x_1$  bis  $x_2$  (Anm.: Falls  $f(x)$  im ganzen Intervall gleiches Vorzeichen hat.)

**Warum ist das so?**

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \text{ kann dargestellt werden als Summe: } \sum_{i=1}^N f(\zeta_i) \cdot (\xi_i - \xi_{i-1})$$

$x_1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = x_2$  Einteilung des Intervalls  $x_1$  bis  $x_2$  in kleinen Schritten  $\zeta_i$  ist beliebiger Wert im Intervall  $[\xi_{i-1}, \xi_i]$

Ist Unterteilung  $x_1 = \xi_0 < \dots < \xi_n$  beliebig fein, so konvergiert diese Summe (Riemansche Summe) gegen das Integral

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}) \right| \rightarrow 0$$

**Fundamentalsatz von Differential- und Integralrechnung** Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral:

$$\frac{d}{dx} \left( \underbrace{\int_{x_1}^x f(x')dx'}_{\text{Stammfkt } F(x) \text{ von } f(x')} \right) = \frac{d}{dx} (F(x)) = f(x)$$

**Warum gilt das?**

<sup>1</sup>Merkregel:  $\frac{NAZ-ZAN}{N^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x')dx'\right) \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} x + \Delta x f(x')dx' \int_{x_1}^{x_1} x f(x')dx' / \Delta x \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

### Integrale fundamentaler Funktionen

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ für $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$e^x$	$e^x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

$\int f(x)dx$  ist unbestimmtes Integral.

Beispiel: Bestimmtes Integral  $\int_{x_1}^{x_2} x^5 dx = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{6}x_2^6 - \frac{1}{6}x_1^6 = \frac{1}{6}(x_2^6 - x_1^6)$

**TODO: Vorlesung 4 fehlt**

### 3.2.2 Verallgemeinerung von Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}} \\
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \\
\text{mit } \frac{d}{dt}\vec{r}(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel: Wurfparabel: Bewegung mit (konstanter) Erdbeschleunigung  $\downarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$  mit  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt' = \vec{v}_0 + \vec{a}t = (v_{0x} v_{0y} v_{0z} - gt)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t') dt' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t \\ z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Wahl des Koordinatensystems:

$$1. \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$2. v_{0y} = 0$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \varphi$$

$$v_{0z} = v_0 \sin \varphi$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \varphi \\ 0 \\ v_0 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \varphi \cdot t \\ 0 \\ v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$t \text{ eliminieren: } t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi}$$

$$\Rightarrow z = v_0 \sin \varphi \cdot \frac{x}{v_0 \cos \varphi} - \frac{1}{2} g t^2 \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow z(x) = x \cdot \tan \varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

Für  $\varphi = 0$ :

Anm.:  $\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} < 0 \Rightarrow$  Maximum für  $\frac{dz}{dx} = 0$

Beispiel: Affenschuß:  $\varphi = 0$

$$\Rightarrow z(t)_{\text{Affe}} = -\frac{1}{2} g t^2 = z(t)_{\text{Ball}}$$

$$x(t)_{\text{Affe}} = x_0 = \text{const} = v_0 t$$

### 3.2.3 Vektordarstellung der Drehbewegung

Erinnerung:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ z_0 \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi(t) \frac{d\varphi}{dt} \\ R \cos \varphi(t) \frac{d\varphi}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{v}$  steht senkrecht auf  $\vec{r}$ , denn  $\vec{v} \cdot \vec{r} = R^2 \omega (-\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) = 0$   $\vec{v}$  senkr. Drehachse  $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{z}$ , denn  $\vec{v} \cdot \vec{z} = 0$

Was ist die Beschleunigung  $\vec{a}$ ?  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\dot{\omega} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + R\omega \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cdot \omega \\ -\sin \varphi \cdot \omega \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$R\dot{\omega} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + R\omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu- oder Abnahme der Umfangsgeschwindigkeit, parallel zu  $\vec{v}$  ( $=0$  für  $\omega = \text{const}$ )

Entgegengesetzt zum Ortsvektor  $\vec{r}$ : Zentripetalbeschleunigung  $a_{zent}$

$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} =$  Winkelbeschleunigung

$\vec{a}_{zent}$  antiparallel zu  $\vec{r}$

Für  $\omega = \text{const} \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \Rightarrow$  Umfangsgeschwindigkeit konstant.

$\vec{a}_2 \neq 0$  auf für  $\omega = \text{constant}$ .  $\vec{a}_{zent} \perp \vec{v}$ , denn  $\vec{a}_{zent} \cdot \vec{r} = 0$   $\vec{a}_{zent}$  zeigt zur Drehachse hin, da antiparallel zu  $\vec{r}$ .

$|\vec{a}_{zent}| = R\omega^2 \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = R\omega^2 = \text{constant}$  für  $\omega = \text{constant}$

Bemerkung: Auch die Winkelgeschwindigkeit kann als Vektor dargestellt werden:  $\vec{\omega}$ .

- Richtung von  $\vec{\omega}$ : Drehachse
- Betrag von  $\vec{\omega}$ :  $|\vec{\omega}| = \omega$

Damit:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$

Überprüfung für unser Beispiel:  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$   $\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{z_0}{R} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{z_0}{R} \end{pmatrix} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

### 3.3 Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätze

Bisher: Beschreibung, wie sich ein Körper bewegt.

Jetzt: Frage, warum sich ein Körper bewegt.

Benötigt neue physikalische Größen

- Kraft
- Masse
- Impuls
- Energie
- Leistung

### 3.3.1 Kraft, Masse, Impuls

- Kraft und Masse Kraft wirkt auf ein Objekt mit gewisser Stärke und in eine gewisse Richtung.  $\Rightarrow$  Vektor  $\vec{F}$

Beispiel

- Gewichtskraft
- Federkraft
- Kraft zwischen geladenen Teilchen

#### Gewichtskraft auf Erdoberfläche

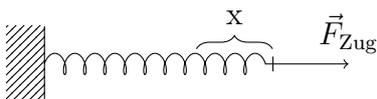
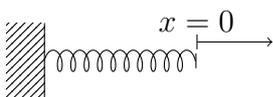
$$\vec{F}_{\text{Gewicht}} = \underbrace{m}_{(\text{schwere})\text{Masse}} \cdot \vec{g}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad g = 9.,81 \frac{m}{s^2}$$

$$[\vec{F}] = kg \frac{m}{s^2} = N \text{ (Newton)}$$

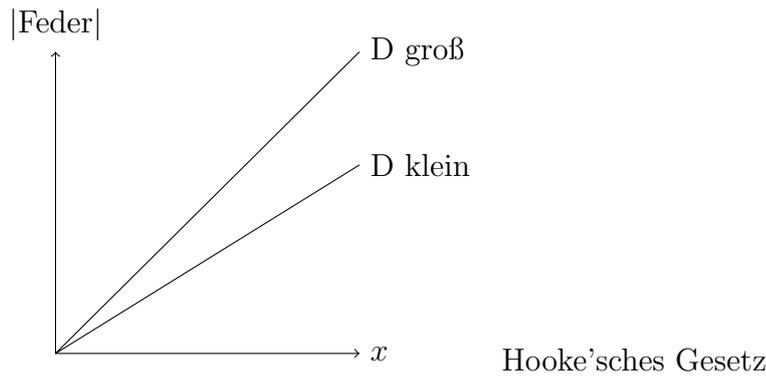
$$[m] = kg$$

Bem.: Kraft wirkt auf Körper. Masse ist Eigenschaft des Körpers.

#### Federkraft



$$F_{\text{Feder}} = - \underbrace{D}_{\text{Federkonstante}} x \text{ zur } |\text{Kraft}| = |\vec{F}_{\text{Feder}}|$$



Hooke'sches Gesetz erlaubt Massen- und Kraftmessung Wenn Körper ruht, wirkt insgesamt keine Kraft auf ihn!  $\Rightarrow m \cdot g - Dx_0 = 0 \Rightarrow m \cdot g = Dx_0$

Reibungskraft

Tritt auf, wenn sich Körper gegeneinander und dabei mit endlicher Fläche berühren:

Haftreibung

Zug-Kraft, die notwendig ist, einen Körper in Bewegung zu verstehen:  $-\vec{F}_H = \vec{F}_{Zug}$

$$|\vec{F}_H| = \underbrace{\mu_n}_{\text{Haftreibungs-Koeffizient}} \cdot \underbrace{|\vec{F}_N|}_{\text{Normal-Kraft}} \quad (\text{unabhängig von der Auflagefläche})$$

Normal-Kraft ist die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zur Auflage!

Gleitreibung Zug-Kraft, um den Körper gleichmäßig (= konstante Geschwindigkeit) zu bewegen.  $|\vec{F}_G| = \underbrace{\mu_G}_{\text{Gleitreibungs-koeffizient}} \cdot |\vec{F}_N|$  (Abhängig von Material, Geschwindigkeit, ...)

Es gilt immer:  $\mu_G < \mu_H$

Rollreibung: Zug-Kraft, um Körper mit Rädern gleichmäßig zu bewegen.

$$|\vec{F}_R| = \underbrace{\mu_R}_{\text{Rollreibungs-koeffizient}} \cdot |\vec{F}_N|$$

i.A:  $\mu_R < \mu_G$  Autoreifen auf Asphalt:  $\mu_R \approx 0.01\mu_G$

### Kraftfelder „Fernkraft“ auf Objekt

Übt ein Objekt eine (Fern-)Kraft auf ein anderes Objekt aus, so lässt sich diese Kraft als Funktion des Abstandsvektors  $\vec{r}$  angeben.  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , d.h. jedem Punkt im Raum wird eine Kraft zugeordnet, unabhängig davon ob sich dort ein Körper befindet.

$\Rightarrow$  Kraftfeld unabhängig von Gegenwart des Körpers (Probe-Körper)

Beispiel: Schwerefeld der Erde Gravitationsgesetz:

$$\vec{F} = - \underbrace{G}_{\substack{\text{Gravitationskonstante} \\ 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}}} \frac{m \cdot M_E}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Auf der Erdoberfläche:  $r = R_E = \text{Radius der Erde} = 6.4 \cdot 10^6 m$

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \text{ Einheitsvektor } \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{e}_z \quad \vec{F} = -G \underbrace{\frac{M_E}{R_E^2}}_{=g} m \vec{e}_z$$

Möglichkeit, um Erdmasse  $M_E$  zu bestimmen.  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$   $g = G \frac{M_E}{R_E^2} \Rightarrow M_E = \frac{g R_E^2}{G} \approx 6.0 \cdot 10^{24} kg$

**Addition von Kräften** Kräfte addieren sich vektoriell!

Wenn der Körper ruht, dann wirkt insg. keine Kraft auf ihn.

- Impuls

Impuls =  $\vec{p} = m\vec{v}$  Maß für den Bewegungszustand eines Körpers  $[p] = kg \frac{m}{s} = kg \frac{m}{s^2} s = Ns = [F \cdot t]$

### 3.3.2 Die Newton'schen Gesetze

Isaac Newton, 1643 - 1727 Gravitationsgesetz Differentialrechnung

1. Newton'sches Gesetz Jeder Körper bleibt in Ruhe oder gleichförmige Bewegung, wenn keine (äußere) Kraft auf ihn wirkt.  $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const.}$  (Impuls:  $\vec{p} = m\vec{v}$ )
2. Newton'sches Gesetz Eine Impulsänderung wird durch eine Kraft verursacht.

$$\underbrace{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}_{\text{Dies ist die eigentliche Definition der Kraft}} \quad \stackrel{m=\text{const}}{=} \quad \underbrace{m}_{\text{Träge Masse}} \frac{dv}{dt} = m\vec{a}$$

Träge Masse: widersetzt sich einer Beschleunigung

3. Newton'sches Gesetz Zwei Körper, die miteinander, aber nicht mit anderen Körpern wechselwirken, üben entgegengesetzt gleiche Kräfte aufeinander aus.  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$   
„actio = reactio“

Bemerkung: Die Newton'schen Gesetze gelten nur in unbeschleunigten Bezugssystemen („Inertialsystemen“).  $\Rightarrow$  In beschleunigten Bezugssystemen treten Scheinkräfte auf.

$S$  = Inertialsystem

$S'$  = beschleunigt gegenüber  $S$

Es gilt:  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$   $\vec{r}$  Ortsvektor in  $S$ ,  $\vec{r}'$  Ortsvektor in  $S'$

Wenn  $\ddot{\vec{R}} \neq 0$  (Bedingung für beschleunigtes System  $S'$ )

$\underbrace{\vec{F}_{ext}}_{\text{Def. in } S} = m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{R}})$  in  $S'$ : Beobachter mißt Beschleunigung  $\ddot{\vec{r}}'$  und schließt auf

Kraft aufgrund des 2. Newton'schen Gesetzes, die eine Scheinkraft enthält.

### 3 Mechanik

$$\underbrace{\vec{F}'_{ext}}_{\text{Kraft des Beobachters in } S'} = m\ddot{r}' = \vec{F}_{ext} - \underbrace{m\ddot{R}}_{\text{Scheinkraft}}$$

Beispiel: Beobachtet im Fahrstuhl im freien Fall:  $\vec{F}_{ext} = \underbrace{m}_{\text{schwere Masse}} \vec{g}; \ddot{r}' = \vec{g} \Rightarrow \vec{F}'_{ext} -$

$$\underbrace{m}_{\text{träge Masse}} \ddot{R} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0$$

$\Rightarrow$  Person im Fahrstuhl ist schwerelos. Bedingung: träge Masse = schwere Masse

**Kraftstoß** Kräfteinwirkung über endliche Zeit erzeugt eine Impulsänderung. (zB beim Stoß zweier Körper).  $\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$

Wegen 3. Newton'schen Gesetz (actio = reactio).

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}_1 &= -\Delta\vec{p}_2 \\ \Leftrightarrow \vec{p}_{1,nach} - \vec{p}_{1,vor} &= -(\vec{p}_{2,nach} - \vec{p}_{2,vor}) \\ \Leftrightarrow \vec{p}_{1,nach} + \vec{p}_{2,nach} &= \vec{p}_{1,vor} + \vec{p}_{2,vor} \end{aligned}$$

Insgesamt: Impuls der beiden Körper nach dem Stoß ist gleich dem Impuls der beiden Körper vor dem Stoß!  $\Rightarrow$  Impulserhaltung

Das Integral des Kraftstoßes kann als Fläche unter der Kurve interpretiert werden.

### 3.3 Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätze

Beispiel: Rakete (Fall, bei dem  $\frac{dm}{dt} \neq 0!$ )

Antriebsgas strömt mit Geschwindigkeitsbetrag  $v_0$  bezüglich der Rakete und einer Rate  $\frac{dm}{dt} = \mu = \text{const}$  aus.

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}
 p(t + dt) &= \underbrace{(m - dm)(v + dv)}_{\text{Rakete}} + dm(v - dv) \\
 &= mv + mdv - vdm - \underbrace{dmdv}_{\substack{\text{2. Ordnung, =0} \\ \text{Produkt 2er kleiner Zahlen!}}} + vdm - v_0 dm \\
 &= mv + mdv + v_0 dm \\
 p(t) &= mv \\
 \Rightarrow dp &= p(t + dt) - p(t) \\
 &= mdv - v_0 dm \\
 \Rightarrow \frac{dp}{dt} &= m \frac{dv}{dt} - v_0 \frac{dm}{dt} \\
 &= m \frac{dv}{dt} - v_0 \mu \stackrel{!}{=} \vec{F}_{ext}
 \end{aligned}$$

Anmerkung:  $m = m(t) = m_0 - \mu t$

1. Fall:  $F_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 \mu}{m} = \frac{v_0 \mu}{m_0 - \mu t}$

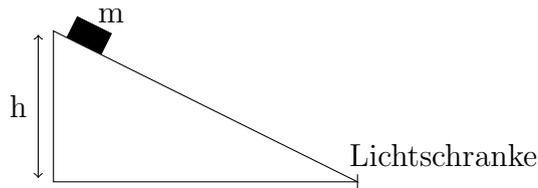
Integration liefert  $v(t=0) = 0$  :

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \int_0^t \frac{dv}{dt} dt' \int_0^t \frac{v_0 \mu}{m_0 - \mu t'} \\
 &= [-v_0 \ln(m_0 - \mu t')]_0^t \\
 &= -(v_0 \ln(m_0 - \mu t) - v_0 \ln(m_0)) \\
 &= -v_0 \ln \left( \frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) \\
 &= v_0 \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right)
 \end{aligned}$$

Beispiel:  $\frac{2}{3}m_0 = \text{Treibstoff} \Rightarrow v_{end} = v_0 \ln 3 = 1.1v_0$

**TODO: Vorlesung 8 fehlt**

### 3 Mechanik



$t_{\text{block}} = 9.02\text{ms}$  Breite Stift  $d = 5\text{mm}$  Höhenunterschied  $h = 14\text{mm}$

$$v = \frac{d}{t_{\text{block}}} = \frac{5\text{mm}}{9.02\text{ms}} = 0.554 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\underbrace{E_{\text{pot},1} + E_{\text{kin},1}}_{\text{Startpunkt}} = E_{\text{pot},2} + E_{\text{kin},2}$$

$$\Rightarrow E_{\text{pot},1} = E_{\text{kin},2}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

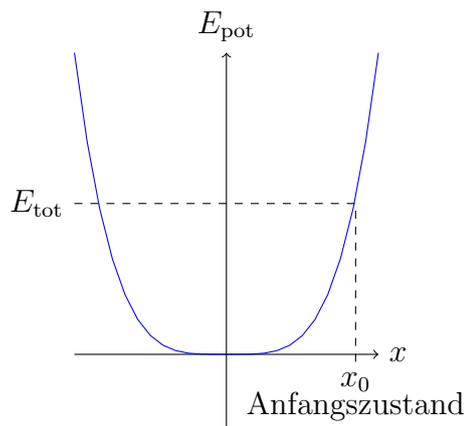
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 14 \cdot 10^{-3}\text{m}} = \underbrace{0.524 \frac{\text{m}}{\text{s}}}_{\text{aus Energiesatz berechnet}}$$

Nur ca. 6% Fehler.

Anmerkung zu Energiesatz der Mechanik:  $E_{\text{tot}} = E_p + \underbrace{E_{\text{kin}}}_{=\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow$  Bewegung nur möglich,

wenn  $E_{\text{tot}} > E_p$

Experiment mit Feder: In Feder gespeicherte potentielle Energie.  $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}D \underbrace{x_0^2}_{\text{Ausdehnung am Anfang}}$



Anfangszustand (Feder zusammengedrückt um  $x_0$ )

### 3.3 Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätze

$$\begin{aligned}
 v &= 0 \\
 |x| &= x_0 \\
 \rightarrow E_{kin,A} &= 0 \\
 \rightarrow E_{p,A} &= \frac{1}{2} D x_0^2
 \end{aligned}$$

Bei  $x = 0$  ist  $E_{p,0} = 0$ ,  $E_{kin,0} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$

Bewegung:  $0 \leq |x| \leq x_0$

$$E_{tot} = E_{p,A} = \frac{1}{2} D x_0^2 = \frac{1}{2} v_{max}^2 = \underbrace{\frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} v^2}_{\text{Allgemeiner Zustand } 0 \leq |x| \leq x_0}$$

Differentiation nach der Zeit  $t$ :  $\frac{dE_{tot}}{dt} = 0 = D x \dot{x} + m v \dot{v} = D x \dot{x} + m \dot{x} \ddot{x} \Rightarrow D x + m \ddot{x} = 0$   
 Differentialgleichung für  $x(t) \Rightarrow E_{Feder} = -D x$  Hook'sches Gesetz

**Leistung** Def. Leistung  $P = \frac{dW}{dt}$  [ $P$ ] =  $\frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} = W$  (Watt)

Betrachte Wegintegral über Kraft längs eines Weges  $C$ , der durch  $\vec{r}(t)$  gegeben ist:

$$P = \frac{d}{dt} \int_C \vec{F}(t) \cdot d\vec{r}(t) \stackrel{\text{für } dt \rightarrow 0}{=} F(t) \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Beispiel: Maximale Beschleunigung  $a$  eines Autos mit Motorleistung  $50kW$  bei einer Momentangeschwindigkeit von  $20 \frac{m}{s}$  ( $72 \frac{km}{h}$ ) Auto:  $m = 10^3 kg$

$$\vec{F} \parallel \vec{v} : P = F v = m a v$$

$$W = Nm s^{-1} = kg m s^{-2} m s^{-1} = kg \frac{m^2}{s^3}$$

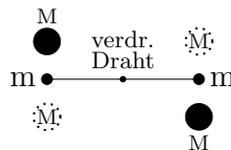
$$a = \frac{p}{m v} = \frac{50 \cdot 10^3 W}{10^3 kg \cdot 20 \frac{m}{s}} = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

### 3.3.3 Gravitationsgesetz

Newton: zwei beliebige Massen  $m_1$  und  $m_2$  ziehen sich mit einer Kraft an, die proportional zu  $\frac{m_1 m_2}{r^2}$  ist. Hierbei ist  $r$  der Abstand der Schwerpunkte der beiden Massen.

Schwerpunkt: Ort, in dem scheinbar die gesamte Masse des Körpers vereinigt ist. Für eine homogene Kugel ist der Mittelpunkt gleich dem Schwerpunkt. (Für Newton war der Beweis dazu die Motivation für die Erfindung der Differentialrechnung)

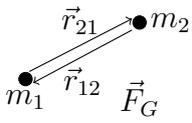
$G$  ist universelle (d.h. von den Körpern  $m_1$  und  $m_2$  unabhängige) Naturkonstante: Gravitationskonstante  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$



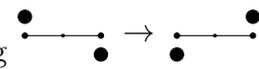
Messung von  $G$ : Gravitationswaage.

### 3 Mechanik

Verdrillung des Drahtes um Winkel  $\varphi$  übt bei Hebellänge  $d$  eine Kraft aus:  $F_{torsion} = D \cdot \frac{\varphi}{d}$

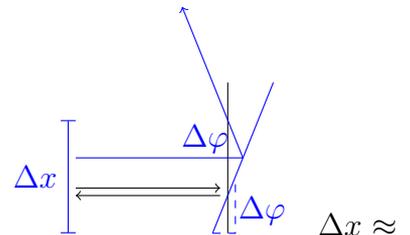
$$F_G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \underbrace{\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}}_{\substack{\text{Einheitsvektor} \\ \text{von 1 nach 2}}} \quad (-, \text{ da anziehende Kraft})$$


Gleichgewicht für  $\underbrace{2}_{2 \text{ Kugelpaare}} |\vec{F}_G| = F_{torsion} \Rightarrow 2G \frac{Mm}{R^2} = D \frac{\varphi}{d}$

Bei Übergang 

ergibt sich Winkeländerung  $\Delta\varphi = 2\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\Delta\varphi}{2} \Rightarrow G = \frac{R^2}{Mm} D \frac{\Delta\varphi}{4d}$

$\Delta\varphi$  Bestimmung Spiegel an Draht lenkt Laserstrahl ab  
 $L \cdot 2\Delta\varphi$  (Kleinwinkelnäherung)  $\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{L}$



$$\begin{aligned} d &= 50 \text{ mm} \\ M &= 1.5 \text{ kg} \\ m &= 0.015 \text{ kg} \\ R &= 48 \text{ mm} \\ D &= 8.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \\ \Delta x &= 99 \text{ cm} - 41 \text{ cm} = 58 \text{ cm} \end{aligned}$$

Einheit:  $\frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{m}}{\text{m}^2} \dots = \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \text{s}^2} = \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

$G = \frac{R^2}{Mm} \frac{D\Delta x}{8dL} = 6.64 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \Rightarrow$  gute Übereinstimmung.

**TODO: Vorlesung 10 fehlt**

3.  $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 = 0 & \Rightarrow \vec{v}' \\ \boxed{m} & \boxed{m} & \boxed{2m} \\ \rightarrow & & \rightarrow \end{array}$$

Impulserhaltung: vor WW:  $\vec{p}_{tot} = m\vec{v}_1$

nach WW:  $\vec{p}_{tot} = 2m\vec{v}'$

$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{v}_1$$

Energie: vor WW:  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_1^2$

nach WW:  $E_{kin} = \frac{1}{2}2m(\vec{v}')^2 = \frac{1}{4}mv_1^2$

$$\Rightarrow \text{inelastischer Stoß } Q = E_{kin} - E'_{kin} = \frac{1}{4}mv_1^2$$

4. Allgemeiner, zentraler, elastischer Stoß mit ruhendem 2. Teilchen,  $m_1 \neq m_2$

zentral: Bewegung in einer Dimension

elastisch:  $Q = 0 \Rightarrow E_{kin} = E'_{kin}$

$\vec{v}_2 = 0 (\vec{p}_2 = 0)$  Lege x-Achse in Richtung der Bewegung.  $\Rightarrow$  anstatt Vektoren nur skalare Größen (x-Komponente)

Impulserhaltung:  $p_1 = p'_1 + p'_2$  (1)

Energieerhaltung:  $\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}$  (2)

Zwei Gleichungen und zwei Unbekannte  $p'_1, p'_2$

$\Rightarrow$  Eindeutige Lösung existiert

$$(1) \Rightarrow p'_1 = p_1 - p'_2 \quad (3)$$

$$(3) \text{ in } (2): \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1^2 + p'^2_2 - 2p_1p'_2}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}$$

$$0 = p'^2_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - 2\frac{p_1p'_2}{m_1}$$

1.  $p'_2 = 0$ : physikalisch unsinnig, denn dann wäre  $p'_1 = p_1$ . Kann aber nicht sein, da sich die beiden Körper nicht durchdringen können.

2.  $p'_2 = 2\frac{p_1}{m_1} \frac{1}{\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}} = 2\frac{p_1}{m_1} \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} = 2p_1 \frac{m_2}{m_1+m_2}$   $p'_1 = p_1 - p'_2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}p_1 - 2p_1 \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}p_1$  Geschwindigkeiten:  $v'_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$   $v'_2 = 2\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$

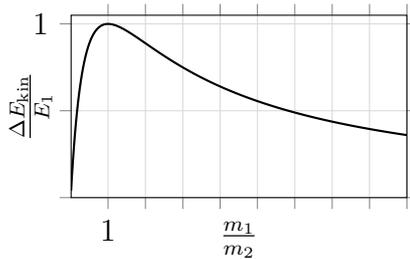
Insbesondere: Wenn  $m_1 = m_2 = m \Rightarrow v'_1 = 0, v'_2 = v_1 \Rightarrow$  kinetische Energie und Impuls werden vollständig auf das zweite Teilchen übertragen. Wenn  $m_2 \gg m_1$  (zB Stoß gegen Mauer)

$\Rightarrow v'_1 \approx -v_1, v'_2 \approx 0 \Rightarrow$  Teilchen 1 wird reflektiert. (nur im elastischen Fall)

### 3 Mechanik

Von  $m_1$  auf  $m_2$  übertragene kinetische Energie für das Beispiel 4:

$$\begin{aligned}\Delta E_{kin} &= \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 \\ &= 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \\ \Rightarrow \frac{\Delta E_{kin}}{E_1} &= 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 4 \frac{\frac{m_1}{m_2}}{\left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right)^2}\end{aligned}$$



Allgemeiner Stoß, bei dem keines der Teilchen vor dem Stoß in Ruhe ist; I.A. einfacher den Stoß im Schwerpunktsystem zu betrachten.

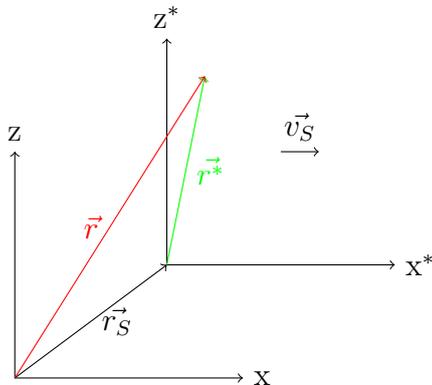
Massenschwerpunkt bei  $N$  Teilchen:  $\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

Differentiation nach der Zeit  $t$ :

$$\vec{v}_S = \frac{d}{dt} \vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \vec{p}_i = \frac{\vec{p}_{tot}}{M}$$

Ohne äußere bleibt  $\vec{p}_{tot}$  Gesamtimpuls konstant.  $\Rightarrow \vec{v}_S = \text{const}$

Wenn Laborsystem ein Inertialsystem ist, ist also auch das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem!



### 3.3 Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätze

$$\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{Geschwindigkeit} \\ \text{gemessen in } S_{Lab}}} = \vec{v}_S + \underbrace{\vec{v}^*}_{\substack{\text{Geschwindigkeit} \\ \text{gemessen in } S_{Sp}}}$$

Beweis: Im Schwerpunktsystem gilt immer:  $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i^* = 0$

Beweis für 2 Teilchen:

$$\begin{aligned} & \vec{r}_1, \vec{r}_2 \text{ in } S_{Lab} \\ & \text{bzw. } \vec{r}_1^*, \vec{r}_2^* \text{ in } S_{Sp} \\ & \vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{r}_S \\ & \vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{r}_S \\ & \sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i^* = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 - \underbrace{(m_1 + m_2)}_{=M} \vec{r}_S = 0 \end{aligned}$$

Diff nach  $t$ :

$$\sum_{i=1}^2 \underbrace{m_i \vec{v}_i^*}_{\vec{p}_i^*} = 0$$

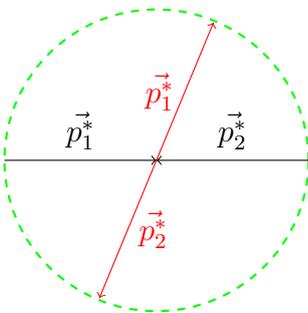
Es dürfen natürlich keine äußeren Kräfte wirken.

Im Schwerpunktsystem:

$$\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* \text{ (vor Stoß)}$$

$$\vec{p}'_1^* = -\vec{p}'_2^* \text{ (nach Stoß)}$$

Bei elastischem Stoß.  $\frac{1}{2}(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})p_1^*{}^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})p_1'^*{}^2 \Rightarrow$  d.h.  $|\vec{p}_1^*| = |\vec{p}'_1^*|$  und ebenso:  $|\vec{p}_2^*| = |\vec{p}'_2^*|$  d.h. bei elastischem Stoß gibt es im Schwerpunktsystem nur eine Drehung der Impulse!



Nach der Rechnung im  $S_{Sp}$ : Rücktransformation nach  $S_{Lab}$

Beispiel: zentraler elastischer Stoß mit  $\vec{v}_2 = 0$

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_S = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_1}{m_1 + m_2}$$

Wegen zentralem Stoß: Betrachtung mit skalaren Größen erlaubt, da 1-dim Bewegung.

Wechsel in $S_{Sp}$	$p_1^* = p_1 - m_1 v_s$	$p_2^* = p_2 - m_2 v_s = -m_2 v_s$
Rechnen in $S_{Sp}$	$p_1'^* = -p_1^* = -p_1 + m_1 v_s$	$p_2'^* = -p_2^* = m_2 v_s$
Wechsel in $S_{Lab}$	$p_1' = p_1'^* + m_1 v_s = -p_1 + 2m_1 v_s$	$p_2' = p_2'^* + m_2 v_s = 2m_2 v_s$
	$p_1' = -p_1 + 2m_1 \frac{p_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1$	$p_2' = 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1$
	$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$	$\Rightarrow v_2' = 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$

Gleiches Ergebnis wie vorher!

**TODO: Vorlesung 12 fehlt**

### Anmerkungen zur Coriolis-Kraft

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

Sinnvoll:  $\vec{\omega}$  in Komponenten zerlegen.

$\vec{\omega}_\perp$ :  $\perp$  zur Erdoberfläche

$\vec{\omega}_\parallel$ : parallel zur Erdoberfläche

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel$$

$$\vec{\omega}_\perp = |\vec{\omega}| \sin \varepsilon$$

$$\vec{F} = 2m \left( \underbrace{\vec{v}' \times \vec{\omega}_\perp}_{\substack{\text{Auf Nordhalbkugel immer} \\ \text{Ablenkung nach Rechts} \\ \text{in Bewegungsrichtung aus gesehen}}} + \vec{v}' \times \vec{\omega}_\parallel \right)$$

Die Komponente  $2m\vec{v}' \times \vec{\omega}_\parallel$  verursacht, dass bei Bewegung (auf der Nordhalbkugel) von Osten nach Westen ein Objekt „etwas schwerer“ wird (Kraft nach oder von West nach Ost „etwas leichter“ wird).

Vom Betrag her sehr gering:  $|\vec{v}'| = 1200 \frac{km}{h}$  (Schallgeschwindigkeit).

Am Äquator: Beschleunigung  $0.05 \frac{m}{s^2}$  ( $\frac{1}{200}$  der Schwerkraft).

Zum Vergleich: Betrag der Zentrifugalkraft am Äquator:  $a_{zent} = \omega^2 r_E = 0.34 \frac{m}{s^2}$

### Foucault'sches Pendel

- Am Nordpol würde sich das Pendel pro Tag um  $360^\circ$  drehen, da sich die Erde unter ihm „wegdreht“
- Am Äquator gibt es gar keine Komponente  $\vec{\omega}_\perp$ , so dass keine seitliche Kraft auftritt.  
 $\Rightarrow$  das Pendel würde sich am Äquator garnicht drehen.
- Dazwischen beim Breitengrad  $\varepsilon$  wirkt Beschleunigung proportional zu  $|\omega_\perp| = |\omega| \sin \varepsilon$  immer seitlich zur Bewegungsrichtung ist.  
 $\Rightarrow$  Da die Kraft nun also um  $\sin \varepsilon$  kleiner als am Pol ist, wird die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Pendels auch um  $\sin \varepsilon$  kleiner sein.

Erlangen:  $\varepsilon = 49.34^\circ \Rightarrow \sin \varepsilon = 0.759$

$$\Rightarrow \underbrace{\omega_F}_{\text{FoucaultPendel}} = \underbrace{\omega}_{\frac{2\pi}{24h}} \sin \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_F} = \frac{2\pi}{24h} \sin \varepsilon \Rightarrow T_F = \frac{24h}{\sin \varepsilon}$$

$T_F$ : Dauer für eine volle Umdrehung

Am Pol:  $\frac{360^\circ}{24h} = 15^\circ/h$  In Erlangen:  $\frac{11.4^\circ}{h}$

$$T_F = \frac{24h}{\sin \varepsilon} = 31.6h$$

### Drehimpuls und Drehmoment

Betrachte zunächst Bewegung eines Massenpunkts auf einer Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  :

Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  r: Ortsvektor, p: Impuls

Wegen des Kreuzprodukts gilt:  $\vec{L} \perp \vec{r}$  und  $\vec{L} \perp \vec{v}, \vec{p}$

Bei Drehung mit konstantem Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\omega}$ :  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ , wenn  $\vec{r} \perp \vec{\omega}$

$|\vec{L}| = r m v = m \omega r^2$  wenn  $\vec{r} \perp \vec{\omega}$

$$\text{Einheit: } [\vec{L}] = kg \frac{m^2}{s} = Nm \cdot s = J \cdot s = \underbrace{[h]}_{\text{Planck'sches Wirkungsquantum}}$$

$\vec{L}$  hängt von der Wahl des Koordinatenursprungs ab!

Frage: Gibt es Analogie zum 2. Newton'schen Gesetz?  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ ?

$$\text{Antwort: Ja } \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} := \vec{D}$  Drehmoment Einheit des Drehmoments:  $[\vec{D}] = N \cdot m$  Anmerkung:  $N \cdot m$  wäre formal  $1J$ , aber beim Drehmoment verwendet man nicht die Einheit  $J$ , sondern  $Nm$ .

Bemerkung: Wenn kein Drehmoment wirkt, ist also der Drehimpuls erhalten!  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constant}$

Drehmoment im Gravitationsfeld der Erde

$$\vec{F}_G = -G \frac{M_E m}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow \vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}_G = 0, \text{ wegen } \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

$\Rightarrow$  Drehimpuls ist also im Gravitationsfeld der Erde erhalten! (Ursprung im Erdmittelpunkt).

Verallgemeinerung: In allen Zentralfeldern ist der Drehimpuls erhalten!

### 3 Mechanik

- Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems von  $N$  Teilchen

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_{tot} &= \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\
 \text{Drehmoment } \vec{D}_{tot} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \underbrace{\vec{F}_i}_{\substack{\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ext}}_{\text{externe Kräfte}} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \underbrace{\vec{F}_{ij}}_{\text{Kraft von Teilchen i auf Teilchen j}}}}) \\
 &= \sum_i = 1^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext}) + \sum_i = 1^N \sum_j = 1^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \text{ mit } \vec{F}_{ii} = \vec{F}_{jj} = 0 \\
 \Rightarrow \vec{D}_{tot} &= \sum_i = 1^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext}) + \frac{1}{2} \sum_i = 1^N \sum_j = 1^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \\
 &= \dots \frac{1}{2} \sum_i = 1^N \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \\
 \Rightarrow \vec{D}_{tot} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext}) \\
 &F_{ij} = -F_{ji}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Wenn keine externen Kräfte  $\vec{F}_{i,ext}$  wirken, ist der Drehimpuls im abgeschlossenen System erhalten!  $\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{D}_{tot} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{tot} = \text{const}$

**Kraftwirkung auf starre Körper** Betrachte starren Körper als System mit fest verbundener Massenpunkte (jeder Massenpunkt repräsentiert ein kleines Volumenelement des Körpers)  $\Rightarrow \vec{r}_i, m_i, i = 1, \dots, N$

Beispiel: Drehmoment bei fester Drehachse Drehmoment  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$  Neben der Kraft  $\vec{F}$  muss der Angriffspunkt ( $\vec{r}$ ) bekannt sein.

**Erklärung Versuch „Folgsame Rolle“** Drehmoment  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$  zeigt in die Tafelenebene hinein!  $\vec{D} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \vec{L}$  zeigt in die Tafelenebene hinein  $\Rightarrow \vec{v}$  zeigt nach rechts  $\Rightarrow$  Rolle rollt nach rechts.

$\vec{D} = \vec{R} \times \vec{F}$  zeigt aus der Tafelenebene heraus  $\Rightarrow \vec{L}$  zeigt aus Tafel heraus  $\Rightarrow \vec{v}$  zeigt nach links, bzw. Rolle rollt nach links!

- Drehmoment durch Schwerkraft

### 3.3 Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätze

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \underbrace{\vec{F}_i}_{\Delta m_i \vec{g}} = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i \right)}_{M \cdot \vec{r}_S \text{ mit Schwerpunkt}} \times \vec{g} = M \vec{r}_S \times \vec{g}$$

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N \Delta m_i}$$

Zur Erinnerung: beim Stoß zweier Körper ist  $N = 2$ :  $\vec{r}_S = \frac{\Delta m_1 \vec{r}_1 + \Delta m_2 \vec{r}_2}{\Delta m_1 + \Delta m_2}$

Geschw  $\vec{v}_S = \frac{\Delta m_1 \vec{v}_1 + \Delta m_2 \vec{v}_2}{\Delta m_1 + \Delta m_2} \Rightarrow$  Wenn der Körper im Schwerpunkt aufgehängt ist, dann ist der Ortsvektor  $\vec{r}_S = 0$  (Ursprung ist im Aufhängepunkt!)

$$\vec{D} = M \vec{r}_S \times \vec{g} = 0$$

- Wenn Körper nicht im Schwerpunkt aufgehängt ist, dann ist der stabile Endpunkt, wenn der Schwerpunkt unterhalb des Aufhängepunkts ist!  $\vec{r}_S \parallel \vec{g} \Rightarrow \vec{D} = 0$  (Kreuzprodukt zweier paralleler Vektoren Null)  $\rightarrow$  Gleichgewicht, wenn Drehmoment der Gewichte Null ist.

$$\vec{r}_1 \times (m_1 \vec{g}) + \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{g}) = 0 \Rightarrow r_1 m_1 = r_2 m_2$$

Bestimmung des Schwerpunktes eines Besens(Stabs) Aufhängung an zwei Fingern. Finger zusammenrutschen.

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + M \vec{g} = 0$ , wenn Stab in Ruhe  $\Rightarrow \vec{F}_1 \vec{F}_2 = -M \vec{g}$ , da  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  und  $\vec{g}$  parallel/antiparallel:  $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = Mg$

Koordinatenursprung im Schwerpunkt SP:  $|\vec{D}_1| = L_1 F_1; |\vec{D}_2| = L_2 F_2$

Gleichgewicht:  $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 = 0 \Rightarrow L_1 F_1 = L_2 F_2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{L_2}{L_1}$  Wenn Finger zusammen bewegt werden, rutscht der Stab über den Finger mit der kleineren Kraft  $\vec{F}_i \Rightarrow L_i$  wird kleiner (vorher  $L_i > L_j$ ). Rutschen bis  $L_1 F_1 = L_2 F_2$ , bzw etwas weiter (Haftreibung  $>$  Gleitreibung). Danach beginnt der andere Finger zu rutschen. Wechselseitig, bis Finger sich im Schwerpunkt treffen.

- Drehmoment bei freier (d.h. nicht fester) Drehachse: Kräftepaare

Kraft  $\vec{F}$  greift an Körper K im Punkt P an. Damit ändert sich insgesamt nichts, denn  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F} = 0$

Welche Bewegung vollführt K?

1.  $\vec{F}_1$  erzeugt Beschleunigung von K, da  $\vec{F}_1$  im Schwerpunkt angreift  $\boxed{\vec{F}_1 = m \frac{d\vec{v}}{dt}}$
2.  $\vec{F}$  und  $\vec{F}_2$  erzeugen keine Beschleunigung, da  $\vec{F} + \vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F} = 0$  Aber sie erzeugen ein Drehmoment!  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$   $\vec{F}_2$  erzeugen kein Drehmoment, da sie in SP angreifen und damit Ortsvektor  $\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{1,2} \times \vec{F}_{1,2} = 0$

$\Rightarrow$   $\boxed{\text{Kraft } \vec{F} \text{ bewirkt Beschleunigung und Drehmoment}}$

**Rotation starrer Körper**

starrer Körper  $= (\Delta m_i, \vec{r}_i), i = 1, \dots, n$

- zunächst Drehung um Symmetrieachse Symmetrie:  $\Delta m_i' |_{\vec{\rho} = -\vec{\rho}_i} = \Delta m_i |_{\vec{\rho} = \vec{\rho}_i}$  In diesem Symmetriefall:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i \times \underbrace{\vec{v}_i}_{=\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i} \\ \vec{r}_i &= \vec{\rho}_1 + \vec{r}_{i,||\vec{\omega}} \\ \Rightarrow \vec{L} &= \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{F}_{i,||\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)}_{= 0 \text{ wegen Symmetriebedingung}} \\ \Rightarrow \vec{L} &= \left( \sum_{i=1}^N \Delta m_i \rho_i^2 \right) \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$\text{Trägheitsmoment } I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \rho_i^2 \Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega} \quad [I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

- gilt nur für Drehung um eine Symmetrieachse
- $I$  hängt von Orientierung der Achse ab! verschiedene Trägheitsmomente für verschiedene Symmetrieachsen
- wegen Symmetriebedingung geht Drehachse durch Schwerpunkt.

Jetzt: Drehachse — Symmetrieachse, aber um  $\vec{d}$  versetzt:

$$\begin{aligned} I_d &= \sum_{i=1}^N \Delta m_i (\vec{\rho}_i + \vec{d})^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \Delta m_i \rho_i^2 + \sum_{i=1}^N \Delta m_i d^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{\rho}_i \vec{d}}_{2\vec{d} \left( \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{\rho}_i \right) = 0 \text{ aufgrund der Symmetriebedingung}} \\ \Rightarrow I_d &= \underbrace{I}_{\text{bzgl. Symmetrieachse}} + \underbrace{M}_{\text{Gesamtmasse}} \underbrace{d^2}_{\text{Abstand der Symmetrieachse von der Drehachse}} \end{aligned}$$

Satz von Steiner

Term  $Md^2$  ergibt Drehimpuls  $Md^2\vec{\omega}_{||}$  was Massenpunkt mit Masse  $M$  im Abstand  $d$  entspricht. Der Satz von Steiner in Worten: Das Trägheitsmoment  $I_d$  eines Körpers bei

Rotation um eine Drehachse, die parallel zu einer der Symmetrieachsen des Körpers im Abstand  $d$  liegt, ist gleich dem Trägheitsmoment  $I$  um die Symmetrieachse plus dem Trägheitsmoment eines Massenpunktes mit der Masse  $M$  des Körpers im Abstand  $d$  von der Drehachse.

**Rotationsenergie** Kinetische Energie der Massenelemente  $\Delta m_i$  aufgrund Rotation.

$$E_{kin} = E_{rot} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta m_i \underbrace{v_i^2}_{\rho_i^2 \omega^2} = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_{i=1}^N \Delta m_i \rho_i^2}_{=I} \Rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

mit  $\vec{L} = I\vec{\omega}$

**Mathematischer Einschub: Volumenintegrale**

$$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \bar{r}_i^2 \text{ mit } \bar{r}_i \text{ entspricht } \rho_i \text{ von vorher}$$

Die Massenelemente  $\Delta m_i$  setzen den Körper zusammen.

Alternativer Ansatz: unterteile den Körper in Volumenelemente  $\Delta V_i$ .  $\Delta m_i = \rho_D \Delta V_i$   $\rho_b$  (Massen)dichte des Körpers  $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$ , i.A. Dichte  $\rho_D(\vec{r})$ , hier aber  $\rho_D = \text{const}$  (d.h. Körper homogen).

$$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \bar{r}_i^2 = \sum_{i=1}^N \rho_D \bar{r}_i^2 \Delta V_i \hat{=} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \int \rho_D \bar{r}^2 dV \text{ i- 3-dimensionales Integral = Volumenintegral}$$

Beispiel: für Volumenintegrale (Symmetrien ausnutzen).

- Integral über Quader

$$\int f(\vec{r})dV \quad f: \text{beliebigen Funktion des Ortes } \vec{r} \text{ (z.B. Dichte)} = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz f(\vec{r})$$

- Integral über Zylinder: Zylinderkoordinaten  $\rho, \phi, z$  nutzen  $x = \rho \cos \phi$   $y = \rho \sin \phi$   
 $\rho$  Abstand zur z-Achse  $\phi$  Abstand zur x-Achse

$$\int_{\text{Zylinder}} f(\vec{r})dV = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \int_0^h dz f(\vec{r}) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Integral über Kugel  $r$ : Abstand vom Mittelpunkt  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   $\vartheta$ : Winkel zwischen dem Vektor vom Zentrum zu dem betrachteten Punkt und der z-Achse.  
 $\phi$ : Winkel zwischen der x-Achse und der Projektion des Ortsvektors in der x-y-Ebene.

$$x = r \cos \phi \cos \vartheta \quad y = r \sin \phi \sin \vartheta \quad z = r \cos \vartheta \quad \text{Kugelkoordinaten } r, \vartheta, \phi$$

$$\int_{\text{Kugel}} f(\vec{r})dV = \int_0^R dr \int_0^\pi r d\vartheta \int_0^{2\pi} R \sin \vartheta d\phi f(\vec{r}) = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi f(\vec{r})$$

$$\text{Kugelvolumen: } f(\vec{r}) = 1 \Rightarrow V_K = \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta}_{[-\cos \vartheta]_0^\pi = 2}_{=2\pi}$$

### Allgemein: Volumenintegrale in der Mechanik

$$f(\vec{r}) = 1 \Rightarrow \int_V dV = \text{Volumen} = V.$$

$$f(\vec{r}) = \rho_D(\vec{r}) \Rightarrow \int_V \rho_D(\vec{r})dV = \text{Masse} = M$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}\rho_D(\vec{r}) = (xyz)\rho_D(\vec{r}) \Rightarrow \int_V (xyz)\rho_D(\vec{r})dV = \underbrace{\vec{r}_{sp}}_{\text{Schwerpunkt}} M$$

$$f(\vec{r}) = (x^2 + y^2)\rho_D(\vec{r}) = \int_V \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=\rho^2 \text{ Abstand Drehachse}} \rho_D(\vec{r})dV = \text{Trägheitsmoment bzgl. z-Achse.}$$

Beispiel: Trägheitsmoment einer homogenen Kugel (Dichte  $\rho_D = \text{const}$ , Masse  $M$ , Radius  $R$ )

$$\begin{aligned}
 f(\vec{r}) &= (x^2 + y^2)\rho_D = (r \sin \vartheta)^2 \rho_D \\
 I_{\text{Kugel}} &= \rho_D \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin^2 \vartheta \\
 &= \rho_D \int_0^R \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \frac{1}{5} R^5 \cdot 2\pi \\
 NR : \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta &= - \int_1^{-1} \sin^2 \vartheta d(\cos \vartheta) \\
 &= - \int_{-1}^1 (1 - \cos \vartheta)^2 d(\cos \vartheta) \\
 &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \\
 \frac{d}{d\vartheta} &= -\sin \vartheta \Rightarrow d(\cos \vartheta) = -\sin \vartheta d\vartheta \\
 V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow M = \rho_D V = \rho_D \frac{4}{3}\pi R^3 \\
 I_{\text{Kugel}} &= \rho_D \frac{1}{5} R^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} M R^2
 \end{aligned}$$

**Beschreibung von Translation und Rotation** formal sehr ähnlich. Folgende Größen entsprechen sich:

<b>Translation (geradlinige Bewegung)</b>	<b>Rotation</b>
Länge $x$	Drehwinkel $\phi$
Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ ( $\vec{v}$ )	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ , $ \vec{\omega}  = \dot{\phi}$
Masse $m$	Trägheitsmoment $I$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Kraft $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$	Drehmoment $\vec{D} = \frac{d}{dt}\vec{L}$
Kinetische Energie $E_{Kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$	Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$

Beispiel: Zylinder auf schiefer Ebene  $\vec{F}_N$  Normalkraft  $\vec{F}$  Hangabtriebskraft

$$|\vec{F}| = F = Mg \sin \alpha$$

$$|\vec{D}| = FR = Mg \sin \alpha R$$

Trägheitsmoment  $I = I_Z + MR^2$  (Satz von Steiner)

$$\text{Bewegungsgleichung: } \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = D = MgR \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \underbrace{\frac{MgR \sin \alpha}{I_Z + MR^2}}_{\Omega} dt' = \omega(0) + \Omega t$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \phi(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\Omega t^2 \Rightarrow \phi(t) = \frac{1}{2}\Omega t^2$$

$$\text{Strecke } s(t) = \phi(t)R$$

$$\Rightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2} = \omega R = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_Z}{MR^2}}$$

**Alternative Ableitung Zylinder auf schiefer Ebene**  $\frac{h}{s} = \sin \alpha$   $h = s \sin \alpha$

$$\text{Energieerhaltung: } E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} \quad Mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\text{Abrollbedingung: } s = R\phi \quad N = R\omega \Rightarrow \frac{v}{R} = \omega$$

$$\Rightarrow Mgs \sin \alpha = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I \frac{v^2}{R^2} \quad s = \frac{\frac{1}{2}(1 + \frac{I}{MR^2})v^2}{g \sin \alpha} \quad \frac{d}{dt}: v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{I}{MR^2}}{g \sin \alpha} 2v \quad \text{XXX}$$

$$\Rightarrow a = \dot{v} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

Trägheitsmoment verschiedener „abrollbarer“ Körper.

$$I_{\text{Hohlzylinder}} = MR^2$$

$$I_{\text{Vollzylinder}} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$1 + \frac{I}{MR^2} = \begin{cases} 2 \text{ für Hohlzylinder} \Rightarrow a_{\text{Hohlzylinder}} = \frac{1}{2}g \sin \alpha \\ \frac{3}{2} \text{ für Vollzylinder} \Rightarrow \frac{2}{3}g \sin \alpha \\ \frac{7}{5} \text{ für Kugel} \Rightarrow a_{\text{Kugel}} = \frac{5}{7}g \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{\text{Kugel}} > a_{\text{Vollzylinder}} > a_{\text{Hohlzylinder}}$$

### Der Kreisel

Kreisel = rotierender Körper ohne fest vorgegebene Drehachse

- Trägheitstensor  
Drehimpuls in Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt (Translation

immer „abseparierbar“, indem Schwerpunktkoordinatensystem genommen wird.)

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times \underbrace{\vec{v}}_{dm} \varrho_D dV = \int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho_D dV = \int_V r^2 \omega \varrho_D dV - \int_V (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \varrho_D dV$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$

In Komponenten: 
$$\vec{L} = \int_V \varrho_D \left[ (x^2 + y^2 + z^2)(\omega_x \omega_y \omega_z)(x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] dV$$

$$\vec{L} = \vec{I} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{z.B. } I_{xx} = \int_V \varrho_D \underbrace{(y^2 + z^2)}_{r^2 - x^2} dV \Rightarrow \text{z.B. } I_{xy} = \int_V \varrho_D xy dV = I_{yx} \text{ etc.}$$

Koordinatensystem wählbar, so dass „gemischte Terme“ ( $I_{xy}, I_{yx}, I_{zx}$ ) Null werden.

$$\left( = \right) \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x \\ I_{yy}\omega_y \\ I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

Dann zeigen die Koordinatenachsen längs der Hauptträgheitsachsen (HTA) des

Körpers. Beispiel: Bei Drehung um  $z$ -Achse ( $\omega_x = \omega_y = 0$ ) 
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz}\omega \end{pmatrix} \text{ mit } I_{zz} = \int_V \varrho_D (r^2 - z^2) dV = \int_V \varrho_D (x^2 + y^2) dV$$

Wenn Symmetrien vorhanden sind, sind die HTA's längs der Symmetrieachsen. Drehungen sind nur längs der HTA's mit maximalen u. minimalen Trägheitsmoment stabil. Drehungen um HTA mit „mittlerem“ Trägheitsmoment instabil!  $\Rightarrow$  Bei Drehung um HTA  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  (Symmetrieachse des Körpers)

- $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  dann und nur dann, wenn:

1.  $\vec{\omega} \parallel \text{HTA}$  (z.B.  $\vec{\omega} = \vec{e}_z$ )  
oder

2.  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$  (sphärischer Kreisel)  $\Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}$

Im allgemeinen Fall ist aber  $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$  ( $\vec{L}$  nicht parallel zu  $\vec{\omega}$ )

Falls  $\vec{D} = 0$  ist  $\vec{L} = \text{const}$  („kräftefreier Kreisel“). Berechnung der äußeren Drehmoment Null

tationsmagie eines Kreisels im allgemeinen Fall ( $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$ ) momentane Drehachse

sei gegeben durch  $\vec{\omega} \Rightarrow E_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta m_i \vec{v}_i^2 \quad N = \infty, \Delta m \rightarrow 0 \quad \int_{\frac{1}{2}} (\vec{v}(\vec{r}))^2 \varrho_D(\vec{r}) dV$

$$\Rightarrow E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho_D(\vec{r}) dV$$

### 3 Mechanik

Spatprodukt dreier Vektoren:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$   
 $\vec{a} = \vec{\omega}, \vec{b} = \vec{r}$

$$\Rightarrow E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \int_V [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho_D dV \right]}_{\vec{L}} \vec{\omega} \Rightarrow E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{L} \vec{\omega}$$

Anmerkung:  $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{L} \vec{\omega}$  gilt allgemein, während nur im Spezialfall  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  gilt.  $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \underbrace{I \vec{\omega}}_{=\vec{L}} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I \omega^2$ .

1. Bei Kreisel ohne äußere Kräfte ist  $E_{\text{rot}} = \text{const.}$
2.  $\vec{L}$  ist constant, wenn  $\vec{D} = 0$
3. symmetrischer Kreisel:  $|\vec{\omega}| = \text{constant}$

$\Rightarrow \vec{\omega}$  kann sich nur auf einem Kegel um  $\vec{L}$  bewegen!

**Nutation** Wenn  $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$  ( $\Rightarrow \vec{L} \nparallel FA, \vec{\omega} \nparallel FA$ ) bewegen sich FA und  $\vec{\omega}$  auf Kegel um das raumfeste  $\vec{L}$ . ( $\vec{D} = \text{vorausgesetzt}$ )  $\Rightarrow$  Nutation

**TODO: Vorlesung 17 fehlt**

**TODO: Vorlesung 18 fehlt**

Weitere Beispiele für Pendel:

Fadenpendel (mathematisches Pendel)

$|\vec{F}| = -mg \sin \phi$  -: Kraft wirkt entgegen des Auslenkungswinkel  $\phi$

$|\vec{p}| = mv = ml\dot{\phi} = ml\dot{\omega}$

$\Rightarrow F| = \frac{dp}{dt} = ml\ddot{\phi} = mg \sin \phi \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{g}{l} \sin \phi$  (Dgl für  $\phi(t)$ )

Wegen sin  $\phi$  statt  $\phi$  zuerst keine harmonische Schwingung. Für  $\phi \ll 1 \text{ rad} \Rightarrow \sin \phi \approx \phi$   
 $\Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \phi$  (harmonische Schwingung, wenn Auslenkung  $\phi$  klein).

In Analogie zum Federpendel:  $\phi(t) = A_\phi \sin(\omega t + \alpha)$ .  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$   $\omega$  hängt nur von  $g$  (const) und der Fadenlänge  $l$  ab.

Beispiel: Alternative Herleitung Drehmoment  $|\vec{D}| = lF| = -lmg \sin \phi$

$|\vec{D}| = \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = I\dot{\omega} = I\ddot{\phi} = ml^2\ddot{\phi} \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi$

Physikalisches Pendel: Masse des Fadens wird einbezogen.  $\Rightarrow$  Trägheitsmoment:  $I = \underbrace{I_0}_{\text{Trägheitsm. Faden}} + ml^2$

Trägheitsm. Faden

Drehpendel (Torsionspendel):

Aufsicht:

Drehmoment  $|\vec{D}| = -\tau \phi$  mit  $\tau$  Winkelrichtgröße.  $\frac{dL}{dt} = \underbrace{I}_{\text{Trägheitsmoment}} \ddot{\phi} = -\tau \phi \Rightarrow$

$\ddot{\phi} = \frac{\tau}{I} \phi$  (harm. Dgl für  $\phi(t)$ ). Lösung:  $\phi(t) = A_\phi \sin(\omega t + \alpha)$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{\tau}{I}}$  (hängt nur von Winkelrichtgröße und Trägheitsmoment ab)

**Gedämpfte Schwindungen** Schwingungen von Fadenpendel, Federpendel etc. hören in

Realität „von selbst auf“. Grund: Reibungskräfte:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Luftwiderstand} \\ \text{Reibung an der Aufhängung} \\ \text{Rollreibung bei Pendel aus Wagen und Feder} \end{array} \right.$

→ modifizierte Bewegungsgleichung (für endimens. Bewegung) Reibungskraft ist meist/oft proportional zur Geschwindigkeit der Bewegung: Reibungskraft  $F_R = - \underbrace{b}_{\text{Reibungsbeiwert}} \dot{x}$

$[b] = N \frac{s}{m} = \frac{kg}{s}$  -: Reibung wirkt der Bewegung entgegen.

$$m\ddot{x} = -Dx + F_R = -Dx - b\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = 0 \text{ (Dgl. für gedämpfte Schwingung)}$$

Es gilt Algorithmen um Differentialgleichungen zu lösen. Meist aber relativ kompliziert.

Deshalb nur Angabe der Lösung: Def.:  $\gamma = \frac{b}{2m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$   $\omega_0$ : Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

Je nach Verhältnis  $\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} = \frac{b^2}{4mD}$  gibt es drei verschiedene Lösungen!

- Schwache Dämpfung ( $b$  klein, bzw. genauer  $\frac{b^2}{\omega_0^2} < 1$ )  $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t + \phi)$  ( $A$ : Amplitude,  $\phi$ : Anfangsphase) → exponentielle Dämpfung  $\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{D}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$   
Wegen  $\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} < 1$  gilt:  $\tilde{\omega}^2 > 0$

Kreisfrequenz  $\tilde{\omega}$  ist kleiner als die Kreisfrequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung. „Amplitude“, d.h. maximale Auslenkung einer Schwingung, nimmt exponentiell ab:  $\sim Ae^{-\gamma t}$

$$Ae^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t)$$

- Starke Dämpfung:  $\frac{b^2}{4mD} = \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} > 1 \Rightarrow \omega_0^2 - \gamma^2 < 0$

$$\text{Formal also: } \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{=\alpha} = i\alpha \Rightarrow \cos(\tilde{\omega}t) = \cos(i\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \text{ mit } \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{D}{m}} \quad x(0) = A \text{ und } \dot{x}(0) = -\gamma A$$

- Aperiodischer Grenzfall:  $\frac{b^2}{4mD} = \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} = 1$

Eine Lösung wäre:  $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos \phi$  für  $\dot{x}=0$  Andere Lösung:  $x(t) = A(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}$  für  $x(0) = A$ ,  $\dot{x}(0) = 0$

Reibung gerade so groß, dass keine komplette Schwingung mehr entsteht. Anmerkung: Schnellstmögliche Dämpfung der Schwingungsbewegung.

### TODO: Vorlesung 20 fehlt

Harmonische Welle erfüllt natürlich die Wellengleichung, denn:

$$\xi(z, t) = A \sin(\omega t - kz + \phi) \quad \frac{\delta^2 \xi}{\delta z^2} = -k^2 \xi; \quad \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = -\omega^2 \xi \quad k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{\lambda v}\right)^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 \xi}{\delta z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2}$$

**Wellentypen** iA. breiten sich Wellen im Raum (3D) aus oder auf Oberflächen (2D).

⇒ verschiedene Ausbreitungsformen

$z \Rightarrow \vec{r}$ ; Auslenkung  $\xi \Rightarrow \xi(\vec{r}, t)$

- Ebene Welle mit Wellenvektor  $\vec{k}$

( $|\vec{k}|$ : Wellenzahl)

$\xi(\vec{r}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)$  Im Spezialfall  $\vec{k} = k \vec{e}_z \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = kz$  Allgemein breitet sich die ebene Welle längs der Richtung von  $\vec{k}$  aus. Und es gilt:  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  ( $\vec{v}$ : Vektor der Ausbreitungsgeschwindigkeit = Phasengeschwindigkeit)

- Kugelwelle (3D) oder Kreiswelle (2D)

Punktförmige Erregung  $\Rightarrow$  Welle breitet sich gleichförmig in alle Richtungen um das Erregerzentrum aus. Wenn sich die Welle ausbreitet, muss die Amplitude der Welle abnehmen (Energieerhaltung).

**Polarisation** Kennzeichnet die Richtung der Auslenkung bezüglich der Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ .

- a) transversal: Auslenkung senkrecht zu  $\vec{k}$  Für gegebenen Ort: Schwingung senkrecht zu  $\vec{k} \Rightarrow$  Rückstellkraft  $\vec{F} \perp \vec{k}$

Beispiele: Seilwelle, elektromagnetische Wellen (Licht, Radio). Wenn alle Auslenkungen in einer Ebene sind: z.B. in x-z-Ebene  $\Rightarrow$  lineare Polarisation. longitudinal: Ausbreitung  $\parallel \vec{k}$

Beispiele: Schallwellen, allgemeine Druckwellen

- b)

**Energietransport** Gesamtenergie einer Periode der Welle

$E \sim A^2 \cdot$

$\underbrace{V}$

Volumen, das die Welle in einer Periode einnimmt

Erklärung der quadratischen Abhängigkeit von  $A$ :

$$E = E_{pot} + E_{kin}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2 \sim A^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \Delta m \dot{x}^2 \sim \omega^2 A^2 \sim A^2$$

Proportionalitätskonstante hängt von Art der Welle ab. Energie wird mit der Phasengeschwindigkeit  $v$  transportiert.  $E$  in dem Volumen  $V$ , das die Welle nach ihrer Ausbreitung einnimmt, muss erhalten bleiben.

1D ebene Welle:  $A = \text{const.}$ , weil Volumen konstant bleibt.

2D Kreiswelle:  $A^2 \cdot 2\pi r \lambda = \text{const.} \Rightarrow A \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$  Kreis mit Radius  $r$

3D Kugelwelle:  $A^2 \cdot 4\pi r^2 \lambda = \text{const.} \Rightarrow A \sim \frac{1}{r}$  Kugelschale mit Radius  $r$  und Dicke  $\lambda$

## Wellenphänomene

- Überlagerung (Interferenz) zweier Wellen  
Auslenkung zweier Wellen am gleichen Ort addieren sich (Superpositionsprinzip).

$$\xi(z, t) = \xi_1(z, t) + \xi_2(z, t)$$

Beispiel: Überlagerung zweier Kreiswellen

- destruktive Interferenz: Auslenkungen addieren sich zu 0
- konstruktive Interferenz: Maximale Auslenkung bzgl. Betrag.

Addition zu Null setzt gleiche Amplitude  $A$  voraus.

Zonen maximaler Amplitude:  $|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2| = n\lambda$  ( $n$  ganze Zahl) ( $\vec{r}_x$  Abstand vom Erregerzentrum  $x$ )

Zonen destruktiver Interferenz:  $|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2| = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$  ( $n$  ganze Zahl)

- Reflexion: Trifft eine Welle auf ein undurchdringliches Hindernis bei  $z = 0$ , so wird sie reflektiert, d.h. es entsteht eine zurücklaufende Welle.

$$1D \quad \xi_{RefI}(z, t) = A \sin(\underbrace{\omega t + kz + \Delta\phi}_{\text{Ausbreitung nach } -z}) \quad (\Delta\phi: \text{Phasenverschiebung})$$

$$\text{Einlaufende Welle: } \xi(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad \text{Reflektierende Welle: } \xi_{RefI}(z, t) = A \sin(\omega t + kz + \Delta\phi)$$

Reflexion am „festen Ende“:  $\Delta\phi = \pi$  Reflexion am „losen Ende“:  $\Delta\phi = 0$

$$\text{Festes Ende, Hindernis bei } z = 0: \Delta\phi = \pi \quad \xi(z = 0, t) = \xi_{EInl}(0, t) + \xi_{RefI}(0, t) = A \sin(\omega t) + \underbrace{A \sin(\omega t + \pi)}_{= -\sin(\omega t)}$$

$$\text{Loses Ende, Hindernis bei } z = 0: \Delta\phi = 0 \quad \xi(z = 0, t) = A \sin(\omega t) + A \sin(\omega t) = 2A \sin(\omega t) \text{ („Schwingsbauch“)}$$

**Stehende Welle** Einlaufende und auslaufende Welle überlagern sich:

$$\xi(z, t) = A \cdot \sin(\omega t - kz) + A \cdot \sin(\omega t + kz + \phi)$$

$$\text{Additionstheorem trigonometrischer Funktionen: } \sin(x) + \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \xi(z, t) = \underbrace{2A \cos\left(kz + \frac{\phi}{2}\right)}_{\text{neue Amplitude, ortabhängig!}} \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow \text{gleichphasige Schwingung an allen Orten mit räumlich variierender Amplitude.}$$

Zum Vergleich:

- sich ausbreitende ebene Welle

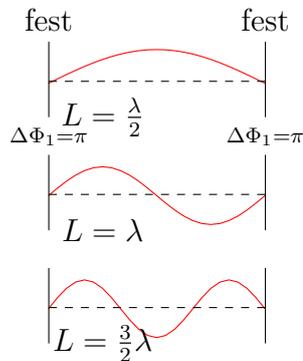
$$\xi(z, t) = A \sin(\omega t - \underbrace{kz}_{\text{ortsabhängige Phase}}) \text{ gleiche Amplitude}$$

- stehende Welle

$$\xi(z, t) = \underbrace{2A \cos\left(kz + \frac{\phi}{2}\right)}_{\text{ortsunabhängige Amplitude}} \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \text{ keine Ortsabhängigkeit der Phase}$$

**Mehrfach-Reflexion: Resonanz** Einlaufende und reflektierende Wellen überlagern sich vielfach durch mehrfache Reflexion an zwei parallelen Objekten (Spiegel).  $\Rightarrow$  Stabiles (statisches) Schwingungsbild, wenn alle reflektierten Wellen nach einem vollständigen Umlauf gleichphasig sind, d.h.  $2kL + \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = n2\pi$ .  $L$ : Abstand zwischen den zwei Spiegeln,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

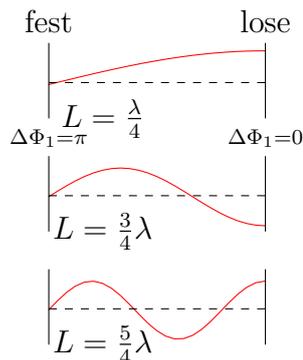
Art der Reflexion bestimmt  $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2$ .



$$\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = 2\pi$$

$$\Rightarrow 2kL = n' \cdot 2\pi; n' \in \mathbb{N} \Rightarrow L = n' \frac{\lambda}{2}$$

Art der Reflexion ein festes und ein loses Ende.



$$\Rightarrow 2kL = (2n' + 1)\pi \Rightarrow L = (2n' + 1) \frac{\lambda}{4}; n \in \mathbb{N}$$

Anmerkung: Resonanz bei Mehrfach-Reflexion ist ähnlich, aber nicht identisch zur Resonanz bei erzwungenen Schwingungen. Anwendungen: Musik-Instrumente (Geige, Gitarre, Orgel), Laser

**Schwebung** Überlagerung zweier Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen  $\nu_1, \nu_2$  bzw, Kreisfrequenzen  $\omega_1, \omega_2$  mit Ausbreitung in gleicher Richtung.. Entsprechend sind natürlich  $\lambda_1 = \frac{v}{\nu_1} = \frac{2\pi}{2\pi\nu_1}v = \frac{2\pi}{\omega_1}v$   $v$ : Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen.  $\lambda_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}v \Rightarrow k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{v}, k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\omega_2}{v}$

$$\xi(z, t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 z) + A \sin(\omega_2 t - k_2 z)$$

Additionstheorem:  $\sin x + \sin y = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$$\Rightarrow \xi(z, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \sin(\omega_m t - k_m z)$$

mit  $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

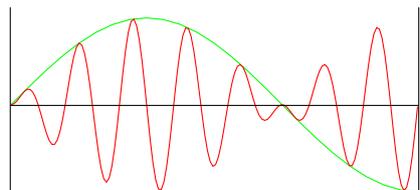
$$\frac{\Delta k}{2} = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

An festem Ort (o.B.d.A  $z = 0$ ) trotzdem zeitliche Variation der Auslenkung:

$$\xi(0, t) = 2A \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}_{\text{bedingt „Auf- und Abschwellen“ des Tons = Schwebung}} \cdot \underbrace{\sin(\omega_m t)}_{\text{bedingt Tonhöhe}}$$

$z = 0 = \text{const}$



Sinuswelle mit Kreisfrequenz  $\omega_n$       Einhüllende  $2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$

Generell bei Wellen: zwei Geschwindigkeiten

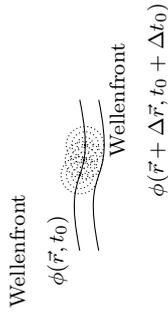
- **Phasengeschwindigkeit**

$v_{ph} = \frac{\omega_m}{k}$  Geschwindigkeit mit der sich die Phase der Welle ausbreitet.

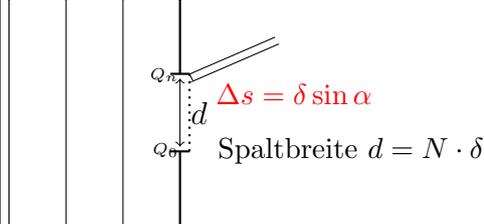
- **Gruppengeschwindigkeit**

$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$  Geschwindigkeit mit der sich die Einhüllende ausbreitet.

**Beugung** Beugung kann durch Huygens'sches Prinzip verstanden werden. Ausbreitung von Wellen beschreibbar indem jeder Punkt P auf einer „Phasenfläche“/Wellenfront (Fläche gleicher Phase) der Ursprungswelle als Ausgangspunkt einer neuen Kugelwelle (Sekundärwelle oder Elementarwelle) betrachtet wird.



Beispiel: Beugung am Spalt Einfallende Welle eben mit Ausbreitung in  $z$ -Richtung.



Betrachten Interferenz in sehr großer Entfernung.

$r \gg d$

$\delta$ : Entfernung zweier Punkte, die Sekundärwellen erzeugen. Weglängendifferenz  $\Delta s$  zweier paralleler Strahlen unter Winkel  $\alpha$ :  $\Delta s = \delta \sin \alpha$ .  $\Rightarrow$  Überlagerung aller Kugelwellen bzw. im Grenzfall großer Entfernung  $r$  ebener Wellen ergibt die gesamte Auslenkung der Welle:

$$\xi(\alpha) = \sum_{i=1}^N A \cdot \sin(\omega t - k r_n) \text{ mit } r_n = r + (N - n)\Delta s$$

Ausführung der Summe und Bilden der Intensität  $I \sim |\xi|^2$  ergibt:  $I(\alpha) \sim A^2 \frac{\sin^2(\frac{N}{2} \Delta \varphi)}{\sin^2(\frac{\Delta \varphi}{2})}$

mit  $\Delta \varphi = k \Delta s = k \delta \sin \alpha$

Ebene Welle fällt auf Spalt der Breite  $d = N \cdot \delta$  für  $N \rightarrow \infty$  und  $\delta \rightarrow 0$ :  $I(\alpha) \sim A^2 \frac{\sin^2(\frac{N}{2} \Delta \varphi)}{\sin^2(\frac{\Delta \varphi}{2})} = A^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2} k d \sin \alpha)}{\sin^2(\frac{1}{2} \frac{k d}{N} \sin \alpha)} = (n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0) = \frac{\sin^2(\frac{k d}{2} \sin \alpha)}{(\frac{k d}{2} \sin \alpha)^2}$

Funktion  $\frac{\sin(x)}{x}$  nennt man sinc-Funktion. Der Verlauf  $\frac{\sin^2(\frac{k d}{2} \sin \alpha)}{(\frac{k d}{2} \sin \alpha)^2}$  trägt vom Verhältnis  $\frac{\lambda}{d}$  ab.  $I(\alpha) = 0$  für  $\frac{k d}{2} \sin \alpha = \pm n \pi, n \in \mathbb{N}$ , außer 0.

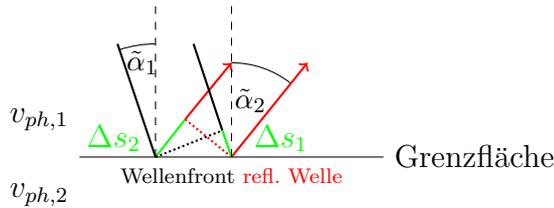
$$\frac{k d}{2} \sin \alpha = \pm n \cdot \pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha = \pm n \frac{\lambda}{d}$$

Spezialfall: Spaltbreite  $d \rightarrow \infty$ , d.h. kein Spalt vorhanden: Nur für  $\alpha = 0$  hat  $I$  einen endlichen Wert

$\Rightarrow$  ebene Welle resultiert.

**Brechung & Reflexion** Welle fällt auf Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$ .  $\Rightarrow$  Ein Teil der Welle wird reflektiert, der andere Teil der Welle tritt in das zweite Medium, ändert aber die Ausbreitungsrichtung (Brechung).

Huygens'sches Prinzip für Reflexion



Da Welle auch nach Reflexion im Medium 1 mit  $v_{ph,1}$  bleibt, muss  $\Delta s_1 = \Delta s_2$  gelten.  
 $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ .

Wegen  $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$  und  $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 \Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2}$ .

$\Rightarrow$  Reflexionswinkel  $\tilde{\alpha}_2$  ist gleich dem Einfallswinkel  $\tilde{\alpha}_1$ .

Brechung: Huygens'sches Prinzip anwenden Für Wellenfront der gebrochenen Welle muss also gelten:  $\Delta t$  muss gleich sein (nein-doch-oooh).  $\Delta t = \frac{\Delta s_1}{v_{ph,1}}$  aber auch  $\Delta t = \frac{\Delta s_2}{v_{ph,2}}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s_1}{v_{ph,1}} = \frac{\Delta s_2}{v_{ph,2}} \Rightarrow \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{v_{ph,1}}{v_{ph,2}} \quad \Delta s_1 = d \sin \alpha \quad \Delta s_2 = d \sin \beta \Rightarrow \frac{d \sin \alpha}{d \sin \beta} = \frac{v_{ph,1}}{v_{ph,2}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{ph,1}}{v_{ph,2}}$$

Snellius'sches Brechungsgesetz. Gilt für beliebige Wellen, auch für Licht.

### 3.3.4 Flüssigkeiten und Gase

Betrachtung von Kräften und Bewegungen von bzw. in fluiden Medien (Flüssigkeiten, Gase).

#### Kenngößen fluider Medien

- Volumen  $V$ ,  $[V] = m^3$

- Dichte  $\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$ ,  $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

typische Dichten verschiedener fluider und fester Medien:

Wasser	$\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$
Luft (trocken, 20C)	$\rho = 1.2 \frac{kg}{m^3}$
Eisen	$\rho = 7.9 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$
Blei	$\rho = 11.4 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$

- Stoffmenge  $n$  gibt Zahl der Atome oder Moleküle an, bzw. die „Anzahl der mole“.  $n = \frac{\text{Anzahl der Teilchen } N}{N_A}$   $N_A$ : Avogadro-Konstante. Anzahl der Atome/Moleküle.  $1mol = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$   $[n] = mol$

$1mol$  = Stoffmenge, deren Masse in Gramm dem atomaren Gewicht der Einzelatome/Moleküle in atomaren Masseneinheiten (amu) entspricht.  $1amu = 1.66 \cdot 10^{-27} kg$  atomare Masseneinheit. Kohlenstoff-Isotop mit 12 Kernteilchen.  $12g \text{ } ^{12}_6C$  entsprechen  $1mol \text{ } ^{12}_6C$

Gemessene Masse der Luft: 4.3g Volumen der Kugel:  $4.18l = 4.18 \cdot 10^{-3} m^3$

Dichte  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{4.3 \cdot 10^{-3} kg}{4.18 \cdot 10^{-3} m^3} = 1.03 \frac{kg}{m^3}$

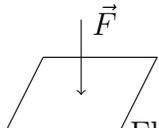
Normale Luft: 80%  $N_2$  ( $^{14}N$ ), ca. 20%  $O_2$  ( $^{16}O$ ) mittlere Gewicht einer Moleküls in Luft:  $29amu$   $1mol \text{ Luft} \hat{=} 29g$

### 3 Mechanik

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \text{kg}}{1.03 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 28.2 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 = 28.2 \text{l}$$

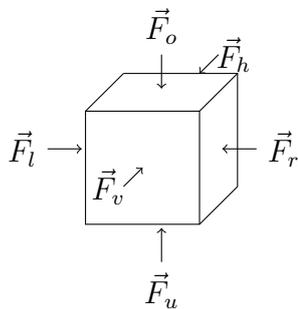
$$\text{Masse} = M = n \cdot N \cdot m$$

$n$ : Stoffmenge  $N$ :  $\frac{\text{Anzahl der Teilchen (Atome/Moleküle)}}{\text{mol}} = \text{Avogadro-Konstante}$   $m$ : Masse eines Teilchens

**Druck**  $\text{Druck} = \frac{|\text{Kraft}|_{\text{normal}}}{\text{Fläche}} = p$  

$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa \text{ (Pascal)}$$

Wichtig: In einer ruhenden Flüssigkeit/Gas herrscht an jedem Ort der gleiche Druck, unabhängig von der Orientierung der Fläche. Betrachte ruhenden Würfel aus Flüssigkeit/Gas in einem gewissen Flüssigkeits-/Gasvolumen.



Ruhend:  $\vec{F}_o = \vec{F}_u$ ;  $\vec{F}_l = \vec{F}_r$ ;  $\vec{F}_v = \vec{F}_h$

#### Typische Drücke

- **Luftdruck (Meereshöhe, 20°C)**  $1.013 \cdot 10^5 Pa$  ( $1 \text{bar} = 10^5 Pa$  alte Einheit für Druck)  
Mensch (75kg) steht auf quadratischer Fläche mit  $(20 \text{cm})^2$   
 $\Rightarrow 1.84 \cdot 10^4 Pa$  „Volumen“ ab ca.  $10^{-2} Pa (1 \text{mbar})$

**Kompressibilität** Gibt relative Volumenänderung bei Änderung des Drucks an:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\delta V}{\delta p} \approx -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

$\frac{\Delta V}{V} \approx -\kappa \Delta p > 0 (\Delta p > 0)$  Volumen wird kleiner bei Druckerhöhung.

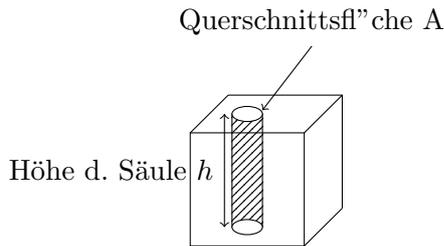
$[\kappa] = \frac{m^2}{N} = \frac{1}{Pa}$ . Anm.:  $\kappa$  ist klein für Flüssigkeiten ( $\kappa_{H_2O} \approx 5 \cdot 10^{-10} \frac{m^2}{N}$ ) und Groß für Gase ( $\kappa_{Luft} = 10^{-5} \frac{m^2}{N}$  auf Meereshöhe, 20°C).

#### Ruhende Flüssigkeiten

Gute Näherun: Flüssigkeiten sind homogen mit konstanter Dichte.

- Hydrostatischer Druck

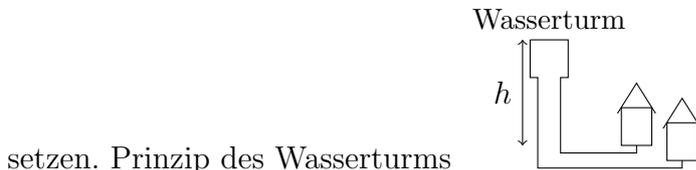
Druck der durch die Gewichtskraft auf die Flüssigkeit erzeugt wird.



Masse der Wassersäule:  $M = V \cdot \rho = Ah\rho$  Gewichtskraft der Säule:  $\vec{F}_N = M \cdot \vec{g} \Rightarrow |F_N| = M \cdot g \Rightarrow$  Druck  $p = \frac{|F_N|}{A} = h\rho g$  Gilt für beliebige Flüssigkeiten (Bsp.: 1mm Quecksilbersäule)  $\rho = 13.5310^3 \frac{kg}{m^3}; g = 9.81 \frac{m}{s^2} h = 1mm = 10^{-3}m \Rightarrow p = 133Pa = 1 \text{ Torr}$

Druck hängt nur von der Höhe  $h$  ab, nicht von der Form des Gefäßes

Druck homogen: dünne Wassersäule genügt, um großes Volumen unter Druck zu



Anmerkung: Im allgemeinen muss beim hydrostatischen Druck noch der Luftdruck addiert werden

### Anwendung des Drucks in Flüssigkeiten

Beispiel: Hydraulische Presse

Druck links = Druck rechts

$$p_1 = \frac{|\vec{F}_1|}{A_1} = p_2 = \frac{|\vec{F}_2|}{A_2} \Rightarrow \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|} \stackrel{\text{für } A_2 > A_1}{=} \frac{A_2}{A_1} > 1$$

$\Rightarrow$  Kraftverstärkung um Faktor  $\frac{A_2}{A_1}$

Anwendung: hydraulische Bremse in KFZ, Wagenheber

Inkompressibilität der Flüssigkeit:  $A_1 \cdot s_1 = A_2 \cdot s_2 \Rightarrow s_1 = s_2 \frac{A_2}{A_1}$

Geleistete Arbeit beim Reinschieben des Zylinders 1:  $W = F_1 \cdot s_1 = F_1 s_2 \frac{A_2}{A_1} = F_2 \cdot s_2$

**Auftrieb in Flüssigkeiten oder Gasen**  $(p_u - p_o)$ : Druckdifferenz aufgrund der Änderung des hydrostatischen Drucks  $|\vec{F}_u| - |\vec{F}_o| = A(p_u - p_o) = A(\rho_{Fl}gh_u - \rho_{Fl}gh_o) = A\rho_{Fl}gH = V_{\text{Quader}}\rho_{Fl}g = |\vec{F}_A|$

Die Auftriebskraft  $|\vec{F}_A|$  entspricht der Gewichtskraft des vom Objekt verdrängten Flüssigkeitsvolumens (Archimedisches Prinzip).

### 3 Mechanik

$\Rightarrow \rho_{\text{Körper}} > \rho_{\text{Fl}} \Rightarrow$  Gewichtskraft des Körpers überwiegt die Auftriebskraft  $\Rightarrow$  der Körper sinkt

$\rho_{\text{Körper}} < \rho_{\text{Fl}} \Rightarrow$  Körper schwimmt

$\rho_{\text{Körper}} = \rho_{\text{Fl}} \Rightarrow$  Körper schwebt

Wenn Körper schwimmt gilt:  $\underbrace{|\vec{F}_A|}_{=v_{in}\rho_{Fl}g} = \underbrace{|-\vec{F}_G|}_{V_{Körper}g} \Rightarrow \frac{v_{in}}{V_{Körper}} = \frac{\rho_{Körper}}{\rho_{Fl}}$

Beispiel: Eisberg im Meer

$$\rho_{\text{Eis}} = 0.95 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{\text{Salzw.}} = 1.05 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{in}}{V_{\text{Eisberg}}} \approx 0.9$$

$\Rightarrow$  90% des Eisbergs sind unter Wasser

Schiff: Masse des verdrängten Wassers = Masse des Schiffs

### Ruhende Gase bei fester Temperatur

Im Gegensatz zu Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar.  $\Rightarrow$  Dichte  $\rho$  ist i.A. nicht konstant

- Boyle-Mariotte'sches Gesetz

Wie hängen Drucken und Volumen eines Gases zusammen (Temperatur konstant)?

$V \cdot p = \text{const.}$  (temperaturabhängig, gilt nur bei konstanter Temperatur)

Kompressibilität: Wie hängt  $\kappa$  vom Druck ab?

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta p} \quad (\text{mit } V = \frac{\text{const.}}{p} \Rightarrow \frac{\delta V}{\delta p} = -\frac{\text{const.}}{p} = -\frac{1}{p}V) \quad = \frac{1}{p}$$

$\Rightarrow$  Gase lassen sich umso schwerer komprimieren, je höher der Druck ist.

**Dichte**  $M = \rho V \Rightarrow \rho = \frac{M}{V} = M \frac{p}{\text{const.}} \Rightarrow \rho \sim p$  (bei fester Temperatur)

### Druckmessung

Viele verschiedene Messprinzipien. Druckmessgerät: Manometer

Quecksilbermanometer

$$p_{\text{gemessen}} = g\rho_{\text{Hg}}\Delta h$$

„Normaler“ Luftdruck (Meereshöhe, 20°C, trocken) =  $1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr}$   
 $1 \text{ mmHg} \hat{=} 1 \text{ Torr}$

### Barometrische Höhenformel

Wie hängt der Luftdruck von der Höhe ab? Nicht wie bei Flüssigkeiten, da  $\rho \neq \text{const.}$  (Gase komprimierbar).

Betrachte Druckänderung in infinitesimalen Höhenintervallen  $dh$ .

$$dp = -dMg/A = -dh \cdot A \cdot \rho g/A = -dh\rho g$$

Wegen  $\rho \sim p$  ist  $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} g p dh$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh, \text{ mit } p = p(h) \Rightarrow \boxed{p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte:  $\frac{\rho_0}{p_0} g = \frac{1.24 \frac{kg}{m^3}}{1.013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = \frac{1}{8.33km} \Rightarrow p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{8.33km}}$

$\Rightarrow$  In 8.33km Höhe fällt der Luftdruck auf  $\frac{1}{e}$  des Drucks auf Meeresebene ab

Gilt streng nur für konstante Temperatur.  $\Rightarrow$  Vereinfachung, Atmosphäre hat keinen scharfen Rand!

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{8.33km}} \approx p_0 \left(1 - \frac{h}{8.33km}\right)$$

**Prüfung bis hier**

### Oberflächenphänomene bei Flüssigkeiten

**Oberflächenspannung** Flüssigkeiten bestehen aus Atomen / Molekülen.

Kräfte zwischen Molekülen halten die Flüssigkeit zusammen. Um die Oberfläche der Flüssigkeit zu vergrößern (Moleküle an die Oberfläche zu befördern) ist Arbeit nötig.

Spezifische Oberflächenenergie:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dA}$$

mit  $dW$  : nötige Arbeit

$dA$  : Flächenänderung

$$[\varepsilon] = \frac{J}{m^2} = \frac{N}{m}$$

$$\Delta W = |\vec{F}| \cdot \Delta s = \varepsilon \cdot \underbrace{2}_{\text{Vorder- und Rückseite}} \cdot \Delta s \cdot L$$

$\Rightarrow \varepsilon = \sigma = \frac{\Delta|\vec{F}|}{2L}$  = Oberflächenspannung  $\hat{=}$  Zugspannung tangential zur Oberfläche  $\stackrel{!}{=}$  spez. Oberflächenenergie

Typische Werte:  $H_2O$ :  $\sigma \approx 72 \frac{mN}{m}$   $Hg$ :  $\sigma \approx 470 \frac{mN}{m}$

Beispiel: Seifenblase mit Radius  $r$

$\Rightarrow$  Oberflächenspannung zieht Blase zusammen. Luftdruck in der Blase wirkt dagegen.  
 potentielle Energie in Blase:  $E_{pot} = E_{Ob} + E_{Druck}$  Gleichgewicht, wenn  $F_r = \frac{\delta E_{pot}}{\delta r} = 0$   
 $F_r$ : radial wirkende Kraft, die die Blase vergrößert/verkleinert.

$$\text{a) } E_{Ob} = 2\varepsilon 4\pi r^2 = 8\pi\varepsilon r^2$$

$$\frac{\delta E_{Ob}}{\delta r} = 16\pi\varepsilon r$$

$$\text{b) } \Delta E_{Druck} = -4\pi r^2 p(r) \Delta r$$

$$\Rightarrow \frac{\delta E_{Druck}}{\delta r} \approx \frac{\Delta E_{Druck}}{\Delta r} = -4\pi r^2 p(r)$$

$$\stackrel{\text{a)v.b)}}{\Rightarrow} 16\pi\varepsilon = 4\pi r^2 p(r)$$

$$\Rightarrow p(r) = \frac{4\varepsilon}{r}$$

Generell gilt: Oberflächen/Grenzflächen richten sich so ein, dass die Gesamtenergie minimal wird!

### Grenzflächen fest-flüssig-Gas oder flüssig-flüssig-Gas

Jede Grenzfläche zwischen zwei Medien (1),(2) hat Oberflächenspannung  $= \sigma_{1,2}$ .

Im Gleichgewicht ist Gesamtenergie minimal.

Beispiel:

#### 1. fest-flüssig-Gas

$\sigma_{13} > \sigma_{12} \Rightarrow$  Flüssigkeit wird am Rand hochgezogen ( $A_{13}$  wird zu Gunsten von  $A_{12}$  kleiner)

- Glas-Wasser-Luft
- Glas-Hg-Luft

$$\sigma_{13} < \sigma_{12}$$

Wand „stößt“ die Flüssigkeit (Hg) ab.

#### 2. flüssig-flüssig-Gas

$\sigma_{13} < \sigma_{12} + \sigma_{23} \Rightarrow$  Tropfen aus Flüssigkeit 2 bleibt stabil (Fett auf Wasser)

$\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23} \Rightarrow$  Flüssigkeit 2 breitet sich aus bis monomolekulare Schicht erreicht ist (Öl auf Wasser)

**Kapillarität** Taucht ein dünnes Röhrchen ein, so unterscheidet sich der Flüssigkeitsspiegel im Röhrchen von der Umgebung.

$$\sigma_{13} > \sigma_{12}$$

$$\sigma_{13} < \sigma_{12}$$

$$\text{ohne Beweis: } h = \frac{2\sigma_{23} \cdot \cos \varphi}{R \rho_{\text{Flüssigkeit}}}$$

Beispiel:  $H_2O$  in Kapillare mit Radius  $R = 1\mu m$

$$\Rightarrow h \approx 15m$$